

Лекция: Логарифм числа, его свойства

Преподаватель: Горячева А.О.

Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$ и $b > 0$.

Логарифм числа b по основанию a ($\log_a b$) ---- это показатель степени, в которую нужно возвести основание a , чтобы получить число b :

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

С помощью логарифма разрешимы уравнения вида $2^x = 8$, корнем этого уравнения является **логарифм числа 8 по основанию 2 - $\log_2 8$** .

В общем виде это запишется так: если надо решить уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0$ и $a \neq 1$ и $b > 0$, то корнем этого уравнения будет логарифм числа b по основанию a - **$\log_a b$** .

Десятичный логарифм числа b --- логарифм по основанию 10, обозначается **$\lg b$** :

$$\log_{10} b = \lg b$$

Натуральный логарифм числа b --- логарифм по основанию $e = 2,7182818284\dots$, обозначается **$\ln b$** :

$$\log_e b = \ln b$$

Примеры: Найти значение:

1) $\log_2 32 = ?$

Пусть $\log_2 32 = x$

Так как

$2^x = 32$ (по определению)

$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

$2^x = 2^5, \Rightarrow$

$x = 5 \Rightarrow$

$\log_2 32 = 5.$

Ответ: $\log_2 32 = 5$.

2) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = ?$,

Пусть $\log_{\frac{1}{3}} 9 = x$

Так как $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$, (по определению)

$\frac{1}{3} = 3^{-1},$

$(3^{-1})^x = 9,$

$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$

$(3^{-1})^x = 3^2$

$3^{-x} = 3^2$

$-x = 2 \mid : (-1)$

$x = -2$

Реши сам:

1) $\log_3 9 = ?$, $\log_5 125 = ?$

2) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = ?$, $\log_3 \frac{1}{3} = ?$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$$

Ответ: $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$.

$$a^{\log_a b} = b, \quad (\text{где } a > 0 \text{ и } a \neq 1 \text{ и } b > 0)$$

основное логарифмическое тождеством

Свойства логарифмов:

При любом $a > 0$ (а не равном 1) и любых положительных x и y выполнены равенства:

1) $\log_a 1 = 0$.

2) $\log_a a = 1$

3) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

5) $\log_a x^p = p \log_a x$.

6) $\log_a^k x = \frac{1}{k} \cdot \log_a x$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Формула перехода к новому основанию логарифма: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Следствие 1: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

$$\log_{a^p} b^q = \frac{p}{q} \cdot \log_a b$$

Следствие 2: $\log_{a^p} b^q = \frac{p}{q} \cdot \log_a b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, p и q – действительные числа, $q \neq 0$, в частности

$$\log_{a^p} a^q = \frac{p}{q}$$

при $b=a$ имеем

Примеры:

1. $\log_6 4 + \log_6 9 = ?$

Поскольку основания у логарифмов одинаковые, используем формулу суммы:

$$\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 (4 \cdot 9) = \log_6 36 = 2.$$

2. $\log_2 48 - \log_2 3$.

Основания одинаковые, используем формулу разности:

$$\log_2 48 - \log_2 3 = \log_2 (48 : 3) = \log_2 16 = 4.$$

3. $\log_7 49^6 - ?$

Избавимся от степени в аргументе по первой формуле:

$$\log_7 49^6 = 6 \cdot \log_7 49 = 6 \cdot 2 = 12$$

4. $\frac{\log_2 7}{\log_{16} 49} = ?$

Заметим, что в знаменателе стоит логарифм, основание и аргумент которого являются точными степенями: $16 = 2^4$; $49 = 7^2$. Имеем:

$$\frac{\log_2 7}{\log_{16} 49} = \frac{\log_2 7}{\log_{2^4} 7^2} = \frac{\log_2 7}{\frac{2}{4} \cdot \log_2 7} = \frac{4}{2} = 2$$

Вычислите, используя данные свойства:

Количество заданий и уровень сложности выполняемых заданий выбирают сами учащиеся.

Задания для 1 группы.

Вариант 1 (1 балл)

Вычислите: $\log_2 50 - 2 \log_2 5$.

Вариант 2 (1 балл)

Вычислите: $\log_5 225 - \log_5 9 + 2^{\log_2 5}$.
Вариант 3 (1 балла)
Вычислите: $7^{\log_7 2} : \log_{\frac{1}{3}} 9$.
Вариант 4 (1 балл)
Вычислите: $0,5 \log_2 25 + \log_2 1,6$.
Вариант 5 (1 балл)
Вычислите: $(\sqrt{5})^{2+\log_{\sqrt{5}} 6}$.
Вариант 6 (2 балла)
Вычислите: $2(\log_{\sqrt{7}} 49 - \log_3 \sqrt{27}) \cdot (\log_6 216 - 3^{\log_3 4})$.
Вариант 7 (2 балла)
Вычислите: $(\log_6 4 + \log_6 9) \cdot (3^{\log_3 2} + \log_{\sqrt{2}} 2)$.
Вариант 8 (2 балла)
Вычислите: $\log_{\sqrt[3]{7}} \sqrt[5]{7} \cdot (2^{\log_2 11} - \log_2 4 - \log_2 16)$.
Вариант 9 (3 балла)
$\frac{\log_2 40}{\lg 2} - \frac{\log_2 5}{\log_{80} 2}$.

Задания для 2 группы.

Вариант 1 (1 балл)
Вычислите: $3^{\log_3 2} + \log_7 2 - \log_7 14$.
Вариант 2 (1 балл)
Вычислите: $2^{\log_2 7} \cdot \log_3 \frac{1}{9}$.
Вариант 3 (2 балла)
Вычислите: $(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} 5 + \log_3 81}$
Вариант 4 (1 балл)
Вычислите: $5^{\log_5 2} *_{\log_2 3} +_{\log_2} \frac{4}{9}$
Вариант 5 (1 балл)
Вычислите: $25^{\frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}} 4}$.
Вариант 6 (2 балла)
Вычислите: $(\log_2 10 + \log_{\sqrt{2}} 2 - \log_2 5) \cdot 2^{\log_2 3}$.
Вариант 7 (2 балла)
Вычислите: $\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{2} (3^{\log_3 4} - \log_3 18 + \log_3 2)$.
Вариант 8 (2 балла)
Вычислите: $2^{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}} \cdot \log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{3} (\log_3 2 - \log_3 54)$.
Вариант 9 (3 балла)
Вычислите: $\frac{\log_2 20}{\lg 2} - \frac{\log_2 5}{\log_{40} 2}$.