**Задачи на соотношение сторон и углов в треугольнике**

Прежде чем приступить к решению задач, сделаем еще одно важное замечание: чтобы научиться ездить на коньках по кругу и не падать, достаточно сходить на каток несколько раз, а чтобы стать олимпийской чемпионкой, нужно тренироваться 6 дней в неделю. Все это применимо и к математике. Тем, кто не собирается в дальнейшем связывать свою жизнь с математикой, достаточно решать небольшое количество задач для того, чтобы отработать несложные навыки и уметь применять их на практике.

Тем же, кто захочет углубиться в изучение математики и планирует выбрать профессию, которая с ней связана, нужно решать много самых разных задач, чтобы довести некоторые навыки до автоматизма.

**Задача 1**

Построить треугольник с периметром https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346329/b5512206574192563d3ae6ff5edbf044.png и соотношением длин сторон https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346330/f74576f3477c6b852b0b3233aa92e4dc.png.

***Решение***

Вспомним, что периметр – это сумма длин сторон треугольника.

Зная только периметр, построить треугольник не получится. Почему? Потому что с одним и тем же периметром существует бесконечное множество разных, не похожих друг на друга треугольников (см. рис. 1).



Рис. 1. Различные треугольники, имеющие один и тот же периметр

Но мы знаем соотношение сторон, т. е. его форму. Значит, сможем решить задачу. Для этого нам нужно сначала найти стороны этого треугольника.

Такую задачу мы уже много раз решали. Есть три величины, известна их сумма (https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346329/b5512206574192563d3ae6ff5edbf044.png) и соотношение: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346330/f74576f3477c6b852b0b3233aa92e4dc.png. Вспомним, что если величины относятся как https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346332/83dedd0b5bbe37dc6427f45aa0be7ff9.png, то их можно обозначить как https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346333/79ce3ff39dc58568c9e90245de8e1453.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346334/53648545b74b10b675728a90900a83e1.png. Для трех величин все аналогично: длины сторон относятся как https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346330/f74576f3477c6b852b0b3233aa92e4dc.png, можем обозначить их как:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346335/0dc26a6f506e5eb717332ae2763ef008.png, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346336/92adcee16f600aed862a445816ea7460.png, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346337/d4c28c882311e0cf7e27a630f174ad15.png

По условию их сумма (периметр) равна https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346329/b5512206574192563d3ae6ff5edbf044.png:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346338/1b9372ac2ef858dd6788edc47b4b1d30.png

Решаем полученное уравнение:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346339/ad163b0547b926b44c84a5bcb11b75e3.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346340/b17e84035b734fa76c82cb40564a61aa.png

Значит, длины сторон равны:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346341/1d6002b6bd8d12f6d8e7fdd36a2511e9.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346342/7c52ef22e1ccbc62a8eee064c7179a55.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346343/929ee6da4dd749f46730ef3cf9707a89.png

Проверим, что сумма действительно равна https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346329/b5512206574192563d3ae6ff5edbf044.png:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346344/158a5eed7a45f73e05e6472bb7d8917e.png

Осталось построить треугольник по трем сторонам.

Начертим первую сторону, например https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346345/be803bf5861300186570a709cdb0fcb8.png. Из точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346346/0cfdaa1a3873533e8c89f7fbd95ec205.png надо провести вторую сторону, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346347/de66152309cafc82727a10e0131c1b36.png. Но мы не знаем направления, в котором ее нужно проводить (мы не знаем углы треугольника). Понятно одно: как бы мы ее ни провели, точка https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346348/c4c3688230386ddc08366b2a272c6b5d.png будет на расстоянии https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346349/8057f9ae8212e4da919ea231f8c77484.png от точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346346/0cfdaa1a3873533e8c89f7fbd95ec205.png. Вот и изобразим все возможные варианты, где может оказаться такая точка https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346348/c4c3688230386ddc08366b2a272c6b5d.png на плоскости (см. рис. 2).

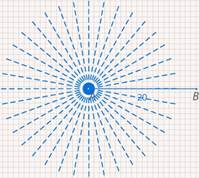


Рис. 2. Возможные варианты, где может находиться точка https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346348/c4c3688230386ddc08366b2a272c6b5d.png на плоскости

Множество точек, удаленных от данной точки на одно и то же расстояние, – это окружность. Рисуем окружность с центром в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346346/0cfdaa1a3873533e8c89f7fbd95ec205.png и радиусом https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346349/8057f9ae8212e4da919ea231f8c77484.png. Ровно такие же рассуждения для третьей стороны https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346351/4521a6c3d4961494ee122f0dde854608.png. Проводим окружность с центром в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png и радиусом https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346353/4ca87300ece585d316f3d2d468dad5ce.png. Окружности пересеклись в двух точках (см. рис. 3).

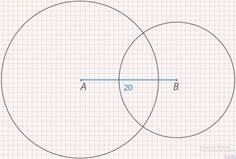


Рис. 3. Окружности с центрами в точках https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346346/0cfdaa1a3873533e8c89f7fbd95ec205.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346355/3eb61e17d80a35f3162d008aa2f830ef.png и радиусами https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346349/8057f9ae8212e4da919ea231f8c77484.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346356/77c723af9793d1a2e680565d3b1ccdb0.png имеют две точки пересечения

**Почему получились две возможные точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346357/a0d46492b185d6400f4e6fcebaa427df.png?**

Мы говорили, что три стороны треугольника однозначно задают треугольник. Почему же у нас получилось две возможных точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346348/c4c3688230386ddc08366b2a272c6b5d.png, каждая из которых удовлетворяет условию задачи?

На самом деле, оба полученных треугольника равны между собой (у них равны длины всех трех сторон). Более того, они симметричны относительно стороны https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346358/abbc70ff0c656bab38713074970e0727.png (см. рис. 4).

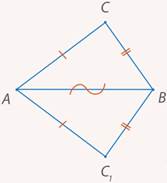


Рис. 4. Равные треугольники https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346360/70c5309876326905fa5a918daf53543a.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346361/ad8aec8f84e8d74d71a8d579436ff2da.png, симметричные относительно https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346358/abbc70ff0c656bab38713074970e0727.png

***Доказательство***

Опустим перпендикуляр из произвольной точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346362/040f8014a419db136e060ca9528768f1.png стороны https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346363/9682ece6a61fbb6710cde8a41e242b1a.png (для стороны https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346364/de2e9d21841ac4677b2dc032e4f9eeb7.png доказательство аналогично) на сторону https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346358/abbc70ff0c656bab38713074970e0727.png и продлим до точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346365/8d73711290102e878ebb44aef151242e.png – пересечения со стороной https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346366/c1964a7cf7b00d6b11dfe4c773aee011.png (см. рис. 5).

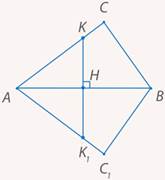


Рис. 5. Полученные треугольники https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346368/6aede0341b41d7fae126dc8a9c17c1c7.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346369/7a01eac9ef31627a083b25473fa02202.png

Рассмотрим треугольники https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346368/6aede0341b41d7fae126dc8a9c17c1c7.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346369/7a01eac9ef31627a083b25473fa02202.png. У них:

1.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346370/916f7b1670d8417ab198412175745f82.png – общая сторона;

2.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346371/f6650ef41a03a3f4cdc24b36d90e2476.png (т. к. https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346372/8cd5c09a2848004c1da25ca0d02a586d.png, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346373/db6b7c65f1159122e45c0b218c5242e7.png);

3.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346374/e89ba1cdbadc341914aaef174cba1d86.png (как соответственные углы равных треугольников https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346375/57d3f815ab485df3dab3848748d0aec7.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346376/7e09746fb0216d02ca0a36cba4a7a689.png).

Из второго признака равенства треугольников следует, что треугольники https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346368/6aede0341b41d7fae126dc8a9c17c1c7.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346369/7a01eac9ef31627a083b25473fa02202.png равны (см. рис. 6).

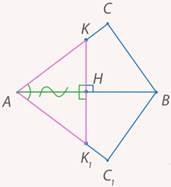


Рис. 6. Треугольники https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346368/6aede0341b41d7fae126dc8a9c17c1c7.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346369/7a01eac9ef31627a083b25473fa02202.png равны по второму признаку равенства треугольников

Получаем, что если из любой точки треугольника https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346360/70c5309876326905fa5a918daf53543a.png опустить перпендикуляр на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346358/abbc70ff0c656bab38713074970e0727.png и продлить его на такую же длину, то получим точку треугольника https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346361/ad8aec8f84e8d74d71a8d579436ff2da.png. Значит, по определению осевой симметрии, которое мы формулировали, когда изучали свойства равнобедренного треугольника, эти два треугольника симметричны.

Когда мы говорили о том, что три элемента треугольника однозначно его задают, то имели в виду следующее: все равные треугольники на плоскости эквивалентны друг другу, мы можем считать их одним и тем же треугольником. Действительно, на плоскости нет никаких ориентиров (точек отсчета), поэтому отличить такие два треугольника мы не можем (см. рис. 7).

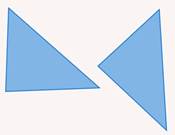


Рис. 7. Эквивалентные друг другу на плоскости треугольники

Обозначим одну из точек пересечения как https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346348/c4c3688230386ddc08366b2a272c6b5d.png. Она находится на расстоянии https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346349/8057f9ae8212e4da919ea231f8c77484.png от точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346346/0cfdaa1a3873533e8c89f7fbd95ec205.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346356/77c723af9793d1a2e680565d3b1ccdb0.png от точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png. Значит, соединив все точки, мы получили нужный треугольник (см. рис. 8).

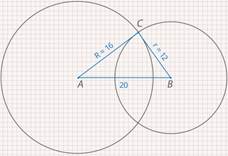


Рис. 8. Искомый треугольник с периметром https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346329/b5512206574192563d3ae6ff5edbf044.png и соотношением длин сторон https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346330/f74576f3477c6b852b0b3233aa92e4dc.png

***Задача решена***

Как видим, полученный треугольник оказался прямоугольным. Треугольник с отношением сторон https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346330/f74576f3477c6b852b0b3233aa92e4dc.png использовался еще в Древнем Египте для построения прямого угла. Достаточно было длинную веревку разметить на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346356/77c723af9793d1a2e680565d3b1ccdb0.png одинаковых частей и вбить три колышка так, чтобы получился треугольник со сторонами https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346380/8c35ba2ef243391ff8db06b733eb13bc.png. Тогда против большей стороны лежал больший угол – прямой.

Этот способ удобно использовать и сейчас, если у вас под рукой нет подходящих приборов, а нужно быстро построить прямой угол (например, наметить границы прямоугольного участка).

Давайте попробуем решить похожую задачу, немного изменив соотношение сторон.

**Задача 1'**

Построить треугольник с периметром https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346381/a2c3b2cbf4fd04032305da255db1696d.png и соотношением длин сторон https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346382/6f44d8981ab83f5518dc5afecf48fe9f.png.

***Решение***

Мы уже знаем алгоритм решения:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346383/31b424686e478d3297def508c8a0cfd4.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346384/c551b761d43a80a65ef76c0649dbbe34.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346385/437eadd7a90d90f980f074f9c1589095.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346386/002eb6531d6f6ccf4fc7b57427458b27.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346387/fae7bf2c7a925707034bb57dff327928.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346388/f1adc5d42ef1eb34e69307fd7b1e5f67.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346389/50d2053c169ee62641d6bf7ef00d7ce5.png

Казалось бы, задача решена. Но давайте попробуем построить данный треугольник. Нарисуем сторону https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346390/7219f998cdb7647c57e09810c033d8bd.png. И построим окружности радиусами https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346391/c61f5e6b0436cc1ffbe3a1bbc472f990.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346392/5a23a33f148f63df39509393103950ee.png с центрами в точках https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346346/0cfdaa1a3873533e8c89f7fbd95ec205.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png. Они не пересекутся, т. е. построить треугольник с такими длинами сторон нельзя (см. рис. 9).

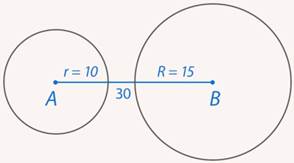


Рис. 9. Окружности с центрами в точках https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346346/0cfdaa1a3873533e8c89f7fbd95ec205.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346394/47060422f8c89228e75fe2c11fb463e2.png и радиусами https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346391/c61f5e6b0436cc1ffbe3a1bbc472f990.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346392/5a23a33f148f63df39509393103950ee.png не пересекаются

Почему так? Вспомним, что мы говорили: не из любых трех отрезков можно построить треугольник (см. рис. 6). Для этого нужно, чтобы выполнялось неравенство треугольника – сумма длин любых двух сторон больше длины третьей стороны: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346395/d00dfc40cd10f1103dff18faf5c31584.png.

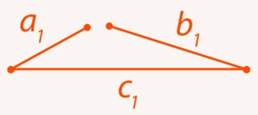


Рис. 10. Отрезки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346397/ebcf890e7139cd7ed9a4dd76fe91f300.png, из которых нельзя построить треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346398/3337918cb00d6de2c4df581ba02da2dd.png

В нашем случае: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346399/032f0b1e63a847a0188394dff47a2856.png, т. е. неравенство треугольника не выполняется и треугольник построить нельзя. Более того, мы могли это заметить еще тогда, когда выписали длины сторон в общем виде: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346400/961cbd449ba4ae974b8ce7c33c114abd.png.

***Задача решена.***

Можно сделать полезный практический вывод: если вам когда-нибудь понадобится сколотить треугольник из трех дощечек, сначала посмотрите, удовлетворяют ли их длины неравенству треугольника.

**Еще одно соотношение длин сторон**

Рассмотрим еще один вариант условия этой задачи.

**Задача**

Построить треугольник с периметром https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346401/0c9a6ac65e00d98f6412ae3efecf50f5.png и соотношением длин сторон https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346402/4cd00fc1b5addca21d241c2641c20d66.png.

***Решение***

Используем тот же алгоритм решения:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346403/9ae58b11a0610e409115c9fc7aae3513.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346404/f7c947c28296aea66b6b261580567575.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346385/437eadd7a90d90f980f074f9c1589095.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346386/002eb6531d6f6ccf4fc7b57427458b27.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346387/fae7bf2c7a925707034bb57dff327928.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346405/ed1aa5daf3bfc1ed59cdd7fd49519687.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346406/2b9c6305f6137cc90ece2c6a4f269c8d.png

Попробуем построить данный треугольник. Нарисуем сторону https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346407/30ee3b9696a7310d9f2891d9c9d46df2.png. И построим окружности радиусами https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346391/c61f5e6b0436cc1ffbe3a1bbc472f990.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346392/5a23a33f148f63df39509393103950ee.png с центрами в точках https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346346/0cfdaa1a3873533e8c89f7fbd95ec205.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png. Они будут соприкасаться в одной точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346348/c4c3688230386ddc08366b2a272c6b5d.png, которая лежит на отрезке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346358/abbc70ff0c656bab38713074970e0727.png (см. рис. 11).

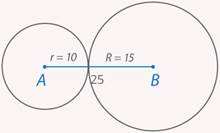


Рис. 11. Окружности с центрами в точках https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346346/0cfdaa1a3873533e8c89f7fbd95ec205.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346409/40bdab557e0f5fdba47bd89eec30bdee.png и радиусами https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346391/c61f5e6b0436cc1ffbe3a1bbc472f990.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346392/5a23a33f148f63df39509393103950ee.png соприкасаются в одной точке

Казалось бы, точку https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346348/c4c3688230386ddc08366b2a272c6b5d.png нашли, а треугольник построить не удалось. В данном случае выполняется соотношение: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346410/33ce5ca3bda3fa5d3bd03286fbb0b978.png. Такая ситуация возможна только в том случае, если одна из точек лежит на отрезке, соединяющем две другие. Иногда в этом случае говорят, что треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346360/70c5309876326905fa5a918daf53543a.png «вырожденный».

Обратите внимание, что условие https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346410/33ce5ca3bda3fa5d3bd03286fbb0b978.png является как необходимым, так и достаточным (т. е. равносильным) условию: точка https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346348/c4c3688230386ddc08366b2a272c6b5d.png лежит на отрезке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346358/abbc70ff0c656bab38713074970e0727.png. Если нам нужно будет доказать, что точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346346/0cfdaa1a3873533e8c89f7fbd95ec205.png, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346348/c4c3688230386ddc08366b2a272c6b5d.png лежат на одной прямой, то достаточно будет доказать, что для отрезков https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346358/abbc70ff0c656bab38713074970e0727.png, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346364/de2e9d21841ac4677b2dc032e4f9eeb7.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346363/9682ece6a61fbb6710cde8a41e242b1a.png выполняется соотношение: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346410/33ce5ca3bda3fa5d3bd03286fbb0b978.png.

Очень похожее решение у задач на соотношение углов в треугольнике.

**Задача 2**

Построить треугольник по заданной стороне между двумя острыми углами и соотношением углов https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346411/90e025cdfcdeb177a6e99dd7ca054ae7.png.

***Решение***

Теперь нам нужно найти градусные меры углов, а не длины сторон. Но математическая модель для решения этой задачи будет точно такая же, как и для длин сторон. Только раньше нам был дан периметр треугольника (сумма длин сторон), а сейчас мы знаем, что в любом треугольнике сумма углов равна https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346412/309385cc0f93af7ed651f6838e0cf5b5.png(см. рис. 12).

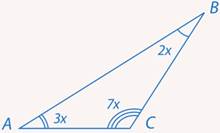


Рис. 12. Треугольник с соотношением углов https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346411/90e025cdfcdeb177a6e99dd7ca054ae7.png

Составляем уравнение:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346414/47a75cfd87f8a7484c7ae4b9e641ab61.png

Получаем:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346415/e41c185244596124030f6d62b1736404.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346416/7a8638650d5019ac491ff1c8c836dd19.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346417/d9fe79b9232d2bd9cec09c48327ffc70.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346418/5d1851f28dda3ac2c540089ca25f09a1.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346419/845f35764afa24ccf4952a3ca80b4a40.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346420/1982ce2d643861f82e9ed2c4a46faed2.png

В отличие от сторон единственное условие для углов треугольника: их сумма должна равняться https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346412/309385cc0f93af7ed651f6838e0cf5b5.png. Мы его учли, когда составляли уравнение, поэтому треугольник с найденными углами всегда будет существовать.

Идем дальше. Что значит «по заданной стороне»? Это значит, что мы должны уметь строить треугольник для любой длины стороны, которую нам могут предложить. Для построения мы возьмем произвольный отрезок, но при этом должны следить, чтобы наш алгоритм построения треугольника мог быть использован для отрезка любой длины (необязательно именно такой, какой мы его выбрали).

Итак, построим заданную сторону. Т. к. она лежит между острыми углами, то это углы https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346421/88fd54a7fca3c79189824f91f33db8d7.png. Осталось отложить эти углы с разных концов стороны и пересечь построенные лучи (см. рис. 13).

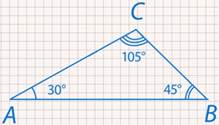


Рис. 13. Треугольник с углами https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346423/cc82e4e748009f25924a086fc8361fd6.png, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346424/4979b233994cb128b259dd93ec293bfa.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346425/98ef6ba54bbc764c4b5df3a7181b6e2d.png

***Задача решена.***

[Соотношения сторон в различных треугольниках](https://interneturok.ru/lesson/geometry/7-klass/treugolnikib/praktika-reshenie-zadach-treugolniki#mediaplayer)

Очень часто мы будем встречать в треугольниках углы, равные https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346423/cc82e4e748009f25924a086fc8361fd6.png, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346424/4979b233994cb128b259dd93ec293bfa.png, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346426/b1e2cfc4a01a5bca6e05a1d61258b82c.png, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346427/1e634f0e0a5fcc48906f026c0d67a80c.png.

Треугольники, у которых есть такие углы, часто оказываются очень удобными инструментами. Они заслуживают особого рассмотрения.

**Задача 3**

Изучить соотношение сторон:

1. в треугольнике, у которого все углы равны;
2. в прямоугольном треугольнике, у которого острые углы равны;
3. в прямоугольном треугольнике, один из острых углов которого равен https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346423/cc82e4e748009f25924a086fc8361fd6.png.

***Решение***

**1.** Самый простой вариант – разделить https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346412/309385cc0f93af7ed651f6838e0cf5b5.png на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346428/21cdc2a4d9d0c3b54e5303a5c29d0f7d.png угла (поровну). Рассмотрим треугольник, у которого все углы равны по https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346426/b1e2cfc4a01a5bca6e05a1d61258b82c.png.

Здесь все просто. По признаку равнобедренного треугольника, если углы при основании равны, то боковые стороны равны. Но т. к. здесь равны все три угла, то и все стороны тоже равны (относительно каждой из трех сторон, которые мы можем выбрать в качестве оснований, оставшиеся две боковые стороны будут равны). Это равносторонний треугольник (см. рис. 14).

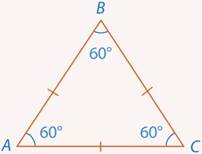


Рис. 14. Равносторонний треугольник

**2.** Рассмотрим прямоугольный треугольник, у которого оставшиеся https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346427/1e634f0e0a5fcc48906f026c0d67a80c.png разделены поровну между двумя острыми углами, т. е. два острых угла по https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346424/4979b233994cb128b259dd93ec293bfa.png.

По признаку равнобедренного треугольника, катеты этого треугольника равны. Если нам нужно получить угол в https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346424/4979b233994cb128b259dd93ec293bfa.png, то достаточно построить равнобедренный прямоугольный треугольник (см. рис. 15).

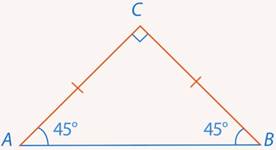


Рис. 15. Равнобедренный прямоугольный треугольник

**3.** Рассмотрим прямоугольный треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346431/1bbb2c3d48257259ae11522a58f39c9d.png, где https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346432/d3476ccb2620cdfef109256cf376ad1c.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346433/52ad79f77318d1639b9f9ade1ddafc9e.png. Легко посчитать, что https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346434/d3b6656b40b1dbb7caff9d7a117405f2.png. Мы видим, что здесь нет равных сторон. Построим равный ему треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346435/8dca98bdc4e7b1bd46783607c6a12a74.png (см. рис. 16).

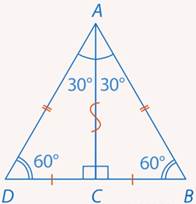


Рис. 16. Равные прямоугольные треугольники https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346431/1bbb2c3d48257259ae11522a58f39c9d.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346435/8dca98bdc4e7b1bd46783607c6a12a74.png

Точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346437/aa345c03c481c3caa0838e03da05ec80.png лежат на одной прямой, т. к. https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346438/b2b78f63fb2cefc08af6ee5668dff472.png, т. е. в сумме образуют развернутый угол.

Получаем треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346439/7843dec5f824970f855483d0e37c5832.png, у которого все углы равны по https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346426/b1e2cfc4a01a5bca6e05a1d61258b82c.png (https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346440/0a6d2853105f065001cd56a7b338ec13.png по построению). Он равносторонний. Но тогда https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346441/9e5e1a0bdad3c2cf36172189fcad568c.png, т. к. https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346442/e0e62a8eb371abbb6b444de8febba4d1.png в равностороннем треугольнике – высота, а значит, и биссектриса, и медиана. Но https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346443/db5ff978f0f9defcb5e8d3c85599949f.png – стороны равностороннего треугольника, поэтому https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346444/b4cf5ed5439c6dc58e7ef5b65c84fff2.png.

Это **свойство прямоугольного треугольника** обычно формулируют так: катет прямоугольного треугольника, лежащий напротив угла в https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346423/cc82e4e748009f25924a086fc8361fd6.png, равен половине гипотенузы (см. рис. 17).



Рис. 17. Катет прямоугольного треугольника, лежащий напротив угла в https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346423/cc82e4e748009f25924a086fc8361fd6.png, равен половине гипотенузы

Оказывается, зная острый угол прямоугольного треугольника, всегда можно вычислить отношение длин его сторон. Но об этом мы поговорим позже.

[Задачи, решаемые при помощи признаков равенства треугольников](https://interneturok.ru/lesson/geometry/7-klass/treugolnikib/praktika-reshenie-zadach-treugolniki#mediaplayer)

Очень часто, чтобы доказать, что две фигуры равны, два отрезка равны или два угла равны, мы доказываем равенство двух треугольников. При этом мы обычно используем один из трех признаков равенства треугольника.

**Задача 4**

На сторонах правильного треугольника https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346360/70c5309876326905fa5a918daf53543a.png отложены равные отрезки от его вершин:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346446/f3f6ef3d7724ff9ede6284a0943431bd.png, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346447/fbac066b6d3cc8dd236f8d952a3eb7d7.png (см. рис. 18). Доказать, что полученный треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346448/d945ceafb932d67e5bd1c61f74b610db.png правильный.

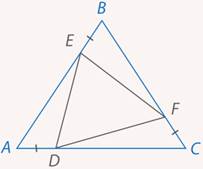


Рис. 18. Иллюстрация к задаче 4

***Доказательство***

Многоугольник, у которого равны все стороны и все углы, называются правильным. Правильный треугольник мы уже знаем под названием равносторонний (подумайте, под каким названием мы знаем правильный четырехугольник).

Чтобы доказать, что треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346448/d945ceafb932d67e5bd1c61f74b610db.png правильный, т. е. равносторонний, нужно показать равенство всех его сторон или всех углов (мы знаем, что и то, и то является признаком равностороннего треугольника).

Поскольку в условии речь идет о равных отрезках, то более простым выглядит первый вариант – доказывать равенство сторон. Рассмотрим три маленьких треугольника https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346450/c2cfd15f5acb6a32aa26d5ffe1536d09.png:

1.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346451/35d96645c75d8600f3a836f0b8007116.png (отложенные равные отрезки);

2.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346452/8900dbc688d535b744425b83df5ef857.png (разность равных сторон и равных отложенных отрезков);

3.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346453/638056fe27328a2694e4b002dc6c80ca.png (как углы правильного треугольника https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346360/70c5309876326905fa5a918daf53543a.png).

Но тогда все три треугольника равны по первому признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними). Тогда https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346454/a004c512cad9d1a5085ff5d6848a34bd.png, т. е. треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346448/d945ceafb932d67e5bd1c61f74b610db.png правильный (равносторонний) (см. рис. 19).

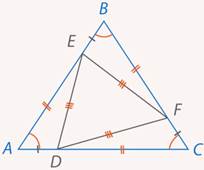


Рис. 19. Равносторонний треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346448/d945ceafb932d67e5bd1c61f74b610db.png

Рассмотрим практическую задачу.

**Задача 5**

Измерить расстояние между двумя точками на местности, между которыми есть препятствие (нельзя пройти напрямую и измерить).

***Решение***

Предположим, что между точками https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346346/0cfdaa1a3873533e8c89f7fbd95ec205.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png находится озеро. Измерим расстояние между ними. Выберем точку https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346348/c4c3688230386ddc08366b2a272c6b5d.png, от которой можно пройти по прямой до обеих точек https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346346/0cfdaa1a3873533e8c89f7fbd95ec205.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png.

Получился треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346375/57d3f815ab485df3dab3848748d0aec7.png (см. рис. 20).

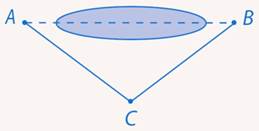


Рис. 20. Иллюстрация к задаче 5

Если построить ему равный треугольник, где есть доступ ко всем трем сторонам, то задача будет решена. Продолжим сторону https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346363/9682ece6a61fbb6710cde8a41e242b1a.png и отложим на ней отрезок https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346457/d420b1d6ace2dbc5f079e82299aa3417.png. Аналогично построим отрезок https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346458/b9b708c7cf1f7b6393e993a6893aecb5.png (см. рис. 21).

Полученный треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346459/6648020b108ad20d0e5d50cef1b5d432.png равен треугольнику https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346375/57d3f815ab485df3dab3848748d0aec7.png по первому признаку (две стороны и угол между ними):

1.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346457/d420b1d6ace2dbc5f079e82299aa3417.png;

2.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346458/b9b708c7cf1f7b6393e993a6893aecb5.png;

3.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346460/48d5faae1340d56632fe919c22b21f85.png (как вертикальные углы).

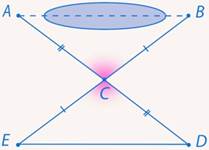


Рис. 21. Равные треугольники https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346375/57d3f815ab485df3dab3848748d0aec7.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346459/6648020b108ad20d0e5d50cef1b5d432.png

Значит, отрезки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346462/1a954a79245ca6c77e381828743237e8.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346358/abbc70ff0c656bab38713074970e0727.png равны с той разницей, что отрезок https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346462/1a954a79245ca6c77e381828743237e8.png можно измерить.

Рассмотрим еще одну задачу.

**Задача 6**

Доказать, что прямая, перпендикулярная биссектрисе угла, отсекает на его сторонах равные отрезки.

***Решение***

Начертим https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346463/dac18013dd7b3c56c359a0a792ff841e.png и его биссектрису. Проведем прямую, пересекающую биссектрису под прямым углом в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346464/baee778e6f54700ab60b3d4deedda2a4.png. Эта прямая пересекла обе стороны угла в точках https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346348/c4c3688230386ddc08366b2a272c6b5d.png (см. рис. 22). Докажем, что два полученных отрезка равны, т. е. https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346465/d4cb9c14edafad71c44fa913fe46b5c0.png.

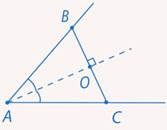


Рис. 22. Иллюстрация к задаче 6

Треугольники https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346467/f89e411474ca2a9b6ba19391bdfcb7ec.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346468/666fa8b864458ac099c4c7886e606e8e.png имеют:

1.   общую сторону https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346469/5037e9241944c185d5cafa5bc551cdc8.png;

2.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346470/5c978b1a1f8ce541f0d60f4967f9edcd.png (по условию);

3.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346471/1b5b8263b4a3830fd0190c3c182099c9.png (т. к. https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346469/5037e9241944c185d5cafa5bc551cdc8.png – биссектриса).

Значит, треугольники https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346467/f89e411474ca2a9b6ba19391bdfcb7ec.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346468/666fa8b864458ac099c4c7886e606e8e.png равны по второму признаку (стороне и двум прилежащим углам). Из равенства треугольников следует равенство их сторон, поэтому https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346472/4cb7427457470d50489b83c09a998049.png.

***Задача решена.***

Вспомним, что из точки к прямой можно провести только один перпендикуляр, а его длина называется расстоянием от точки до прямой. Все остальные отрезки, соединяющие данную точку с другими точками прямой, называются **наклонными**. Мы уже доказали, что перпендикуляр всегда короче наклонной.

Перпендикуляр и наклонная образуют треугольник. Третья сторона этого треугольника называется **проекцией** (если мы будем светить на наклонную, то тень на экране будет именно этой проекцией, отсюда и название). Длины наклонной и проекции связаны. Рассмотрим такую задачу.

**Задача 7**

Доказать, что равные наклонные имеют равные проекции, а большая наклонная имеет большую проекцию.

***Доказательство***

Рассмотрим треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346473/d29ed3f4661679da44282a3d6d5907f3.png. Опустим перпендикуляр https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346358/abbc70ff0c656bab38713074970e0727.png. Пусть две наклонные https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346363/9682ece6a61fbb6710cde8a41e242b1a.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346474/b0f5d41277f1422255ca9b736d85f705.png равны (см. рис. 23).

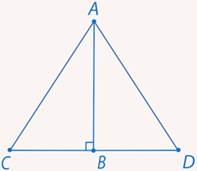


Рис. 23. Иллюстрация к задаче 7

Но тогда треугольники https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346360/70c5309876326905fa5a918daf53543a.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346476/c90b2cfcfdf5cff36a3364e3ed56ed36.png равны по катету и гипотенузе (на прошлом уроке мы формулировали и доказывали этот признак равенства для прямоугольных треугольников).

Следовательно, равны и проекции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346364/de2e9d21841ac4677b2dc032e4f9eeb7.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346477/6f7effacfbb8057664f829ef444ae253.png (как соответственные стороны равных треугольников).

Пусть теперь наклонная https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346474/b0f5d41277f1422255ca9b736d85f705.png больше, чем наклонная https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346363/9682ece6a61fbb6710cde8a41e242b1a.png. Отложим их в одну сторону от перпендикуляра https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346358/abbc70ff0c656bab38713074970e0727.png (см. рис. 24).

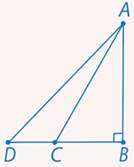


Рис. 24. Треугольник, где одна наклонная больше другой

Выясним, какая из точек https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346348/c4c3688230386ddc08366b2a272c6b5d.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346479/0fb22310f8b75bc29d9e67a41aff0e11.png дальше от точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png. Если они совпадают, то это означает, что https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346480/b9e5758d5663830ed6cb3ca6a268e6ba.png, что противоречит условию. Если точка https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346479/0fb22310f8b75bc29d9e67a41aff0e11.png ближе, то в треугольнике https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346481/02b069dce72ddd4241014683178eb831.png https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346482/54a048c6e466c9acd9178e849f092d69.png, значит, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346483/4591a0aa1075217f069991549f5c8281.png (как лежащий напротив большей стороны). Но этого не может быть, т. к. https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346484/603b2641367329b2c15972ce7491335b.png – острый (он находится в прямоугольном треугольнике), а https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346485/4b8f404b91640aa5f86a9f22b049f175.png – тупой (он смежный для острого https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346486/82f86cdf55af0cfbe80088e68a9f824c.png). Значит, остается только один вариант – точка https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346479/0fb22310f8b75bc29d9e67a41aff0e11.png находится дальше от точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png, чем точка https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346348/c4c3688230386ddc08366b2a272c6b5d.png, т. е. проекция https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346477/6f7effacfbb8057664f829ef444ae253.png больше проекции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346364/de2e9d21841ac4677b2dc032e4f9eeb7.png.

Несложно доказать и обратное утверждение: равные проекции могут быть только у равных наклонных, и чем больше проекция, тем больше соответствующая наклонная.

Рассмотрим еще одну задачу.

**Задача 8**

На основании https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346363/9682ece6a61fbb6710cde8a41e242b1a.png равнобедренного треугольника https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346360/70c5309876326905fa5a918daf53543a.png отмечены точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346362/040f8014a419db136e060ca9528768f1.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346487/af7d0b6cda2d29337a1fc67edcd42b4c.png так, что https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346488/28852ebfb671cec7ace460bab1283746.png. Проведены отрезки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346489/423ddd6a31f30e03d1195bd049c63acc.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346490/62ce4453501bb2a6118eeb3b15cf3406.png. Доказать, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346491/95a442740f8517919dc63ebcf4368375.png (см. рис. 25).

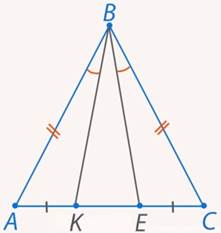


Рис. 25. Иллюстрация к задаче 8

***Доказательство***

Наш основной инструмент для доказательства равенства углов и отрезков – доказательство равенства треугольников, которые эти углы или отрезки содержат.

В данном случае напрашивается анализ треугольников https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346493/a70805d7fc91bc983aaaee96b1143352.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346494/bbdfe008b85962ec025f8e64a91606a4.png:

1.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346495/700c2d82d1f90b34f6f34b6e187e866a.png (как углы при основании равнобедренного треугольника);

2.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346472/4cb7427457470d50489b83c09a998049.png (боковые стороны равнобедренного треугольника https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346360/70c5309876326905fa5a918daf53543a.png);

3.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346488/28852ebfb671cec7ace460bab1283746.png (по условию).

По первому признаку равенства треугольников (две стороны и угол между ними) получаем, что треугольники https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346493/a70805d7fc91bc983aaaee96b1143352.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346494/bbdfe008b85962ec025f8e64a91606a4.png равны. Значит, равны и их соответственные углы, в частности https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346491/95a442740f8517919dc63ebcf4368375.png.

**Заключение**

Мы разобрали задачи на основные теоретические темы, рассмотренные ранее. Конечно, для кого-то такого количества задач окажется недостаточно, чтобы чувствовать себя уверенно. Решите тесты и тренажеры к данному уроку, чтобы проверить уровень своих знаний и навыков.

**Список литературы**

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия. 8 класс. Учебник. – М.: «Просвещение», 2014.
2. Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Прасолов В.В./Под ред. Садовничего В.А. Геометрия. 8 класс. Учебник. – М.: «Просвещение», 2017.
3. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., Геометрия. 8 класс. Учебник. – М.: издательский центр «ВЕНТАНА-ГРАФ», 2018.

**Дополнительные рекомендованные ссылки на ресурсы сети Интернет**

1. Интернет-портал [yaklass.ru](http://www.yaklass.ru/p/geometria/7-klass/sootnoshenie-mezhdu-storonami-i-uglami-treugolnika-9155/sootnosheniia-mezhdu-storonami-i-uglami-treugolnika-9738/re-8ff8415c-958d-4520-9f48-54b6707fe2c9)
2. Интернет-портал [mathematics-time.blogspot.ru](http://www.treugolniki.ru/katet-lezhashhij-protiv-ugla-30/)
3. Интернет-портал [school-assistant.ru](https://school-assistant.ru/?predmet=geometr&theme=priznaki_ravenstva_treugolnikov)

**Домашнее задание**

1. Высоты треугольника https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346360/70c5309876326905fa5a918daf53543a.png, проведенные из вершин https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346352/c246c2b8d0c79802a64e4cb5893756b1.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346496/df847371e443f187f01b6513be11fd61.png пересекаются в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346479/0fb22310f8b75bc29d9e67a41aff0e11.png так, что https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346497/87685b77c1730135cf2ade8f500b0342.png. Доказать, что треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346360/70c5309876326905fa5a918daf53543a.png равнобедренный.
2. В треугольнике https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346360/70c5309876326905fa5a918daf53543a.png углы относятся как https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346498/a2267abf4c7e44b8188380510b950b18.png. Найти длину стороны https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346364/de2e9d21841ac4677b2dc032e4f9eeb7.png, если https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346499/d09724f96963ed1d4daf73d952d7c85b.png см.
3. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346500/23dcb34520b64a32063b862ba2909d78.png см, а боковая сторона равна https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/346501/ff289941e654200aaed286d1ecff54f5.png см. Найти градусные меры углов равнобедренного треугольника.