Раздел 1.

Занятия 1,2.

Числовые множества.

Форма занятия: лекция с элементами беседы.

В повседневной жизни постоянно различные совокупности предметов называют одним словом. Совокупность документов называют архивом; собрание музыкантов – оркестром; группу лошадей – табуном; родителей, детей и их родственников – семьей; большую группу людей – толпой или очередью; собрание книг – библиотекой и т.д.

Математическим понятием, отражающим объединение некоторых объектов, предметов или понятий в одну единую совокупность является понятие множества. Это понятие не определяется, подобно понятиям точки, числа, и является первичным.

Предметы (объекты), составляющие некоторое множество, называются его **элементами**. Все множества можно записывать с помощью заглавных букв латинского алфавита:

A – множество квадратов;

B – множество чисел.

Элементы множества можно записать с помощью маленьких букв: x является элементом множества A.

Это можно записать так: $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ (читают: x есть элемент множества A, или x принадлежит A, или x содержится в A, или A содержит x). Если объект x не является элементом множества A, то это записывают так: $\mathbf{x} \notin \mathbf{A}$ (читается: x не есть элемент множества A, или x не принадлежит A, или x не содержится в A).

Например: Если множество B – множество натуральных чисел, то $2 \in B$, $-7 \notin B$, муха $\notin B$ и т.д.

Множество можно задавать перечислением его элементов.

Например: множество стран на земном шаре задается их списком в географическом атласе, множество учеников в классе – их списком в классном журнале. Если множество задано списком, то названия всех элементов множества записывают в фигурные скобки, разделяя точкой с запятой.

Например: если множество C состоит из трех элементов: 1,9 и –4, то это записывают так:

$$C = \{1; 9; -4\}.$$

Но не все множества можно записывать списком. Если множество содержит бесконечно много элементов, то такой список составить нельзя. Множество считается **заданным**, если указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают никакие другие объекты. Такое свойство называют характеристическим свойством множества.

Множество элементов обладающих характеристическим свойством записывают так:

$A = \{x \mid x=2n, n \in N\}$ означает, что множество A состоит из всех четных натуральных чисел x

Задание 1(устно):

Пусть A множество всех многочленов от одной переменной x, все коэффициенты которых целые. Верна ли запись:

а) $(-15x + 6) \in A$

б) $(\frac{4}{3}x^3 - 1) \in A$

в) $(x^2 + y^2 - 1) \in A$.

Далее мы будем говорить только о числовых множествах.

Давайте вспомним, какие числа вам уже знакомы из школьного курса математики. Это натуральные, целые, рациональные, иррациональные и действительные числа. Указанные числа являются элементами следующих множеств:

N – множество натуральных чисел – его элементами являются числа, которые используются при счете предметов.

$$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Так как множество натуральных чисел является одним из первоначальных понятий математики, то определения ему не дается. Следует помнить, что ноль не является натуральным числом.

Наши первоначальные представления о числе и форме относятся к очень отдаленной эпохе древнего каменного века – палеолита. В течении сотен тысячелетий этого периода люди жили в пещерах, в условиях, мало отличавшихся от жизни животных, и их энергия уходила преимущественно на добывание пищи простейшим способом – собиранием её, где только это было возможно. Пока не произошёл переход от простого собирания пищи к активному её производству, от охоты и рыболовства к земледелию, люди мало продвинулись в понимании числовых величин и пространственных отношений.

Мало-помалу сложилось первобытно-коммунистическое общество с соответствующим распределением пищи, одежды и орудия. Все эти обстоятельства вынудили человека так или иначе вести счет общего имущества, сил врага, с которым приходилось вступать в борьбу за овладение новыми территориями. Процесс счета уже не мог остановиться на четырех(поднятие обеих рук и указание на ноги) и должен был развиваться далее и далее. На этой ступени развития в математику входит первая абстракция, заключающаяся в том, что пересчитываемые предметы заменяются какими-либо другими однородными между собой предметами или знаками: камешками, узелками, ветками, зарубками. Операция производится по принципу взаимно-однозначного соответствия: каждому пересчитываемому предмету ставится в соответствие один из предметов, выбранных в качестве орудия счета (то есть один камешек, один узелок на веревке и т.д.).

Чтобы следить за своим стадом, древние пастухи делали из глины кружки - по одному на каждую овцу. Для того, чтобы узнать, не пропала ли за день хоть одна овца, пастух откладывал в сторону по кружку каждый раз, когда очередное животное заходило в загон. Но в его стаде были не только овцы, поэтому пришлось делать из глины и другие фигурки. А земледельцы с помощью глиняных фигурок вели учёт собранного урожая, отмечая, сколько мешков зерна положено в амбар, сколько кувшинов масла выжато из оливок, сколько соткано кусков льняного полотна. Так, ещё не умея считать, занимались древние люди арифметикой[9].

Но перекладывать каждый раз глиняные фигурки с места на место было довольно утомительным занятием. Да и при обмене рыб на каменные ножи и или антилоп на каменные топоры удобнее было сначала пересчитывать товары, а уж потом приступать к обмену. Но прошло много тысячелетий, прежде чем люди научились пересчитывать предметы. Для этого им пришлось придумать названия для чисел.

Для упрощения счета использовались различные счетные приборы, например, абак (слайд 2 Приложения А), русские счеты (слайд 3 Приложения А) или сходный с ними китайский суан-пан (слайд 4 Приложения А). Абак, впервые появился, вероятно, в Древнем Вавилоне около 3 тыс. до н. э. Первоначально представлял собой доску, разграфлённую на полосы или со сделанными углублениями. Счётные метки (камешки, косточки) передвигались по линиям или углублениям. В 5 в. до н. э. в Египте вместо линий и углублений стали использовать палочки и проволоку с нанизанными камешками.

На множестве натуральных чисел можно ввести операции сложения, умножения и возведения в степень. Это означает, что результатом введенной операции будет также натуральное число. Операция вычитания может выполняться только если уменьшаемое больше вычитаемого (или равно ему, если считать 0 натуральным числом). Операция деления возможна, если частное p и остаток r от деления a на b определяются так: $a = p * b + r$.

Натуральные числа можно разбить на два класса – простые и составные числа.

Определение. Натуральное число n называется **простым** числом, если оно не имеет других делителей, кроме единицы и самого этого числа.

Z - множество целых чисел, его элементы - это натуральные числа, числа, противоположные натуральным и ноль.

$$Z = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

Отрицательные числа стали использоваться в математике значительно позже дробных, тем более, натуральных. В индийских документах отрицательные числа фигурируют с VII века н.э.; китайцы, видимо, начали употреблять их немного раньше. Их применяли для учета долгов или в промежуточных вычислениях для упрощения решения уравнений — это был лишь инструмент для получения положительного ответа. Тот факт, что отрицательные числа, в отличие от положительных, не выражают наличие какой-либо сущности, вызывал сильное недоверие. Люди в прямом смысле слова избегали отрицательных чисел: если у задачи получался отрицательный ответ, считали, что ответа нет вовсе. Это недоверие сохранялось очень долго, и даже Декарт — один из «основателей» современной математики — называл их «ложными» (в XVII веке!).

В результате появления отрицательных чисел и нуля стало возможным введение операции вычитания, которая, если строго ее определить, есть операция сложения, в которой второе слагаемое заменяется противоположным по знаку: $c = a - b \quad \Leftrightarrow \quad c = a + (-b)$.

Q – множество рациональных чисел, состоящее из чисел, которые можно представить в виде несократимой дроби вида $\frac{p}{q}$, *где* p – целое, q- натуральное .

$$Q = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in Z, q \in N \right\}$$

Определив понятие рационального числа в виде дроби, можно ввести операцию деления на множестве рациональных чисел, как умножения на обратное число:

$$c = a : b \quad \Leftrightarrow \quad c = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Из курса математики 6-го класса хорошо известны правила выполнения основных арифметических действий над рациональными числами:

$r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ и $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, тогда

1) $r_1 + r_2 = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$,

2) $r_1 - r_2 = \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{n_1 n_2}$,

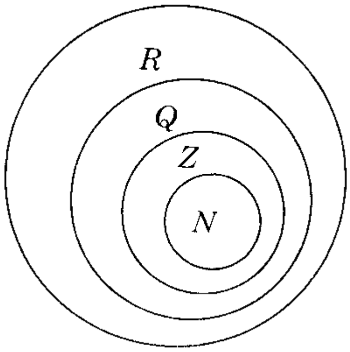
3) $r_1 \cdot r_2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 n_2}$,

4) $r_1 : r_2 = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 m_2}$.

R – множество действительных чисел, элементы которого – либо рациональные, либо иррациональные числа.

Любое иррациональное число можно записать в виде бесконечной непериодической дроби, и любая непериодическая дробь является иррациональным числом (примеры).

Если мы представим данные множества в виде кругов, то, конечно, эти круги будут неравными. Такие круги называются Кругами Эйлера и выглядят вот так (рис. 1)



Операции над множествами.

Два множества А и В называются равными (А = В), если они состоят из одних и тех же элементов, то есть каждый элемент множества А является элементом множества В и наоборот, каждый элемент множества В является элементом множества А .

Говорят, что множество А содержится в множестве В (рис.1) или множество А является подмножеством множества В (в этом случае пишут А В), если каждый элемент множества А одновременно является элементом множества В . Эта зависимость между множествами называется включением. Для любого множества А имеют место включения: А и А А

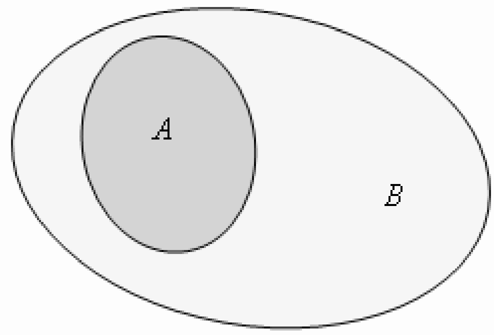


Рис.1

Сумма (объединение) множеств А и В (пишется А В) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит либо А , либо В. Таким образом, е А В тогда и только тогда, когда либо е А , либо е В .

Произведение (пересечение) множеств А и В (пишется А В , рис.2) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит и А , и В . Таким образом, е А В тогда и только тогда, когда е А и е В .

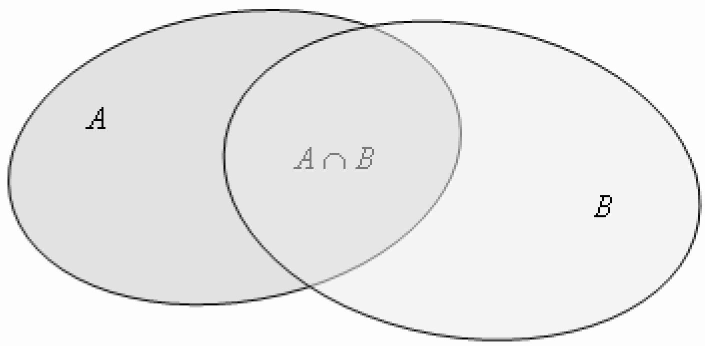


Рис.2

Разность множеств А и В (пишется А – В , рис.3) есть множество элементов, которые принадлежат множеству А , но не принадлежат множеству В. Это множество называется также дополнением множества В относительно множества А.

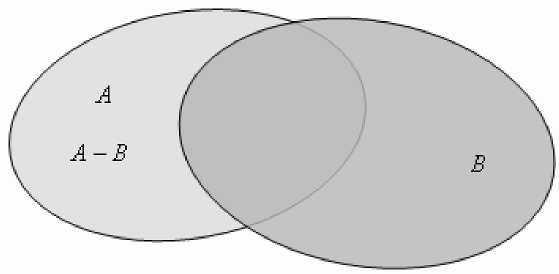


Рис.3

Пример 1. Пусть А есть отрезок [1, 3], В - отрезок [2, 4]; тогда объединением будет отрезок [1, 4], пересечением - отрезок [2, 3], разностью А\В - полуинтервал [1, 2), В\А - полуинтервал (3, 4].

Пример 2. Пусть А есть множество прямоугольников, В - множество всех ромбов на плоскости. Тогда есть множество всех квадратов, А\В - множество прямоугольников с неравными сторонами, В\А - множество всех ромбов с неравными углами.

Пример 3. Пусть А = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} и В = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19}. Найти и объединение и пересечение данных мн-в.

$A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 19},

$A \cap B$ = {1, 3, 5, 7, 9}.

Пример 4. Пусть А = [−2; 1] и В = (0; 3). Найти и объединение и пересечение данных мн-в.

$A \cup B$ = [−2; 3), $A \cap B$ = (0; 1].