Занятия 3,4.

Комплексные числа.

<u>Форма занятия</u>: лекция с элементами беседы.

В связи с развитием алгебры потребовалось ввести сверх прежде известных положительных и отрицательных чисел числа нового рода. Они называются *комплексными*.

Комплексным числом z называется пара (x, y) действительных чисел x и y. При этом равенство, сумма и произведение упорядоченных пар, а также отождествление некоторых из них с действительными числами определяются следующим образом:

1) два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются **равными**, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$;

2) **суммой** комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z вида

$z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

3) **произведением** комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$z = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$;

4) множество комплексных чисел (x,0), $x \in R$, отождествляется с множеством действительных чисел **R**.

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z такое, что $z_2 + z = z_1$, откуда находим $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

Частным комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z такое, что $z_2 \cdot z = z_1$. Отсюда находим

$$z = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

Комплексное число (0, 1) обозначается символом $i = (0, 1)$. Тогда $(0,\ 1) \cdot (0,\ 1) = (-1,\ 0)$, т. е. $i^2 = -1$. Произвольное комплексное число z можно записать в виде

$z = x + iy$.

Эта запись называется **алгебраической формой** комплексного числа. Комплексное число $\bar{z} = (x,\ -y) = x - iy$ называется **сопряженным** по отношению к комплексному числу $z = (x, y) = x + iy$.

Задание1: В ы п о л н и т ь   д е й с т в и я :

1) $(-3 + 5i) + (4 - 3i)$; 2) $(2 + 0i) + (7 + 0i)$; 3) $(0 + 2i) + (0 + 5i)$; 4) $(-2 + 3i) + (-2 - 3i)$; 5) $(-5 + 2i) - (3 - 5i)$; 6) $(3 + 2i) - (-3 + 2i)$; 7) $(3 - 4i) - (3 + 4i)$.

Решение:

1 . $(-3 + 5i) + (4 - 3i) = 1 - 3i$

2 . $(2 + 0i) + (7 + 0i) = 9 + 0i$.

Так как запись $2 + 0i$ означает то же что и 2 и т. д., то выполненное действие согласуется с обычной арифметикой (2 + 7 = 9).

3 . $(0 + 2i) + (0 + 5i) = 0 + 7i$, т.е. $2i + 5i = 7i$.

4 . $(-2 + 3i) + (-2 - 3i) = -4$.

В примере 4 сумма двух комплексных чисел равна действительному числу. Сумма сопряженных комплексных чисел равна действительному числу $2a$.

5 . $(-5 + 2i) - (3 - 5i) = -8 + 7i$

6 . $(3 + 2i) - (-3 + 2i) = 6 + 0i = 6$.

8 . $(3 - 4i) - (3 + 4i) = -8i$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел состоит в том, что каждому комплексному числу z = x + yi ставится в соответствие точка (x, y) координатной плоскости таким образом, что действительная часть комплексного числа представляет собой абсциссу, а коэффициент при мнимой части – ординату точки.

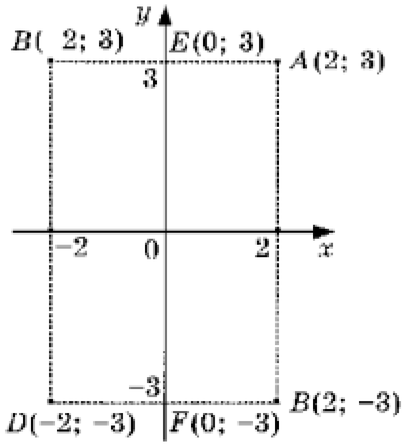

Рис. 1

На рисунке 1 изображена координатная плоскость. Числу 2 + 3i соответствует точка A(2, 3) плоскости; числу 2 – 3i – точка B(2, – 3); числу – 2 + 3i – точка C(– 2, 3); числу – 2 – 3i – точка D(– 2; – 3). Числу 3i соответствует точка E(0, 3); а числу – 3i – точка F(0, – 3). Итак, каждому комплексному числу соответствует единственная точка координатной плоскости и, обратно, каждой точке координатной плоскости соответствует единственное комплексное число, при этом двум различным комплексным числам соответствуют две различные точки координатной плоскости. Ясно, что действительным числам x + 0i соответствуют точки оси абсцисс, а чисто мнимым числам 0 + yi, где y № 0 – точки оси ординат. Поэтому ось Oy называют мнимой, а ось Ox – действительной. Сопряженным комплексным числам соответствуют точки, симметричные относительно оси абсцисс.

Расстояние *r* точки *z* от нулевой точки, т. е. число

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}},$$

называется **модулем** комплексного числа *z* и обозначается символом |*z*|.

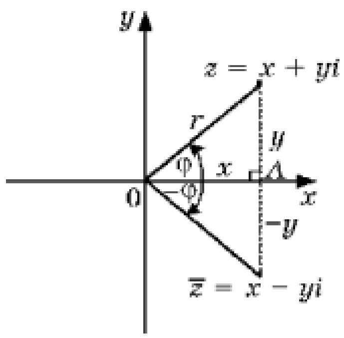

Рис. 2

Существует также **тригонометрическая форма** записи комплексного числа:

x = r cos φ; y = r sin φ.

тогда число z выражается через модуль и аргумент следующим образом:

z = x + yi = r(cos φ + i sin φ).

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Задание 2*:* Найти произведение и частное комплексных чисел: 1) (1 – 2*i*)·(3 + 2*i*); 2) (*a* + *bi*)·(*a* – *bi*); 3) (7 – 4*i*):(3 + 2*i*); 4) (– 2+5*i*):(-3 - 4*i*).

Р е ш е н и е :

1 . $(1-2i)\cdot(3+2i) = 3-6i + 2i + 4 = 7-4i$.

2 . $(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 + b^2$.

Пример 2 показывает, что произведение сопряженных комплексных чисел есть действительное и притом положительное число.

3 . Найти частное $(7-4i) : (3+2i)$

Записав дробь $(7-4i)/(3+2i)$, домножаем её на число $(3-2i)$, сопряженное с $(3+2i)$. Получим:

$$\frac{(7-4i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{13-6i}{13} = 1-2i\,.$$

4 . $$\frac{-2+5i}{-3-4i} = \frac{(-2+5i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)} = \frac{-14-23i}{25} = -0{,}56-0{,}92i$$

Следующее задание учащиеся выполняют самостоятельно.

Задание 3. Даны комплексные числа $z_1 = -2 + 5i$ и $z_2 = 3 - 4i$. Найти:
а) $z_1 + z_2$; б) $z_2 - z_1$; в) z_1z_2; г) z_1/z_2.

Решение:

а), б). Для комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ сумма и разность находятся по формулам $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

В нашем случае имеем:

$z_1 + z_2 = (-2 + 3) + i(5 - 4) = 1 + i$,

$z_2 - z_1 = 3 - (-2) + i(-4 - 5) = 5 - 9i$.

в) Перемножаем z1 и z2 как двучлены с учетом равенства i2 = -1:
z1z2 = (-2 + 5i)(3 - 4i) = (-2)3 + 15i + 8i - 20i2 = -6 + 20 + i(15 + 8) = 14 + 23i.

г) Для нахождения частного $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+5i}{3-4i}$ умножим числитель и знаменатель этой дроби на число, сопряженное знаменателю, т.е. на 3 + 4i; получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-2+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-6+20+15i-8i}{3^2+4^2} = \frac{-26+7i}{25} = -\frac{26}{25}+\frac{7}{25}i$$.

Задание 4. Выполнить действия: 1) $(2+3i)(5-i)-(3-i)^3$, 2) $\frac{(3+2i)^2}{(1-2i)^3}$.

Решение:

1) $10+15i-2i-3i^2-27+27i-9i^2+i^3 = 10+13i+3-27+27i+9-i = -5+29i$ 2)

$$\frac{9+12i-4}{1-6i+12i^2-8i^3} = \frac{5+12i}{-11+2i} = -\frac{5+12i}{11-2i} = -\frac{(5+12i)(11+2i)}{(11-2i)(11+2i)} = -\frac{55-24+132i+10i}{121+4} =$$

$$= -\frac{31}{125}-\frac{142}{125}i\,.$$

Задание 5

. Решить квадратные уравнения: 1) $2z^2+2z+5=0$; 2) $2z^2+15=0$.

Решение:

1) $D_1 = 1-10 = -9$

$z = \frac{-1\pm(3i)}{2}$,

$z_{1,2} = -0{,}5 \pm 1{,}5i$

2) $z^2 = -7{,}5,\ z_{1,2} = \pm\sqrt{-7{,}5} = \pm i\sqrt{7{,}5};$

Задание 6. Представьте в тригонометрической форме числа: а) 1 + i; б) $2+\sqrt{3}\,i$; в) $1-\sqrt{3}i$.

$z^n = \left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$. - формула Муавра

Как было найдено в предыдущем примере, данное число в тригонометрической форме имеет вид $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. По первой формуле Муавра получаем:

$$z^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 2^4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^3\left(\sqrt{3}i - 1\right) = 8\left(\sqrt{3}i - 1\right).$$

Д/з:
1. Вычислите сумму, произведение и частное комплексных чисел: 1) 3+3*i* и 2-3*i*, *2)* 3*i* и 3-3*i*, *3).*
2. Найти модуль комплексных чисел z1 = 4 – 3i и z2 = –2–2i
3. Записать числа в тригонометрической форме. 1) 1, 2) −1, 3) *i*, 4) −*i*; 5) $z = 3 - 3i$.