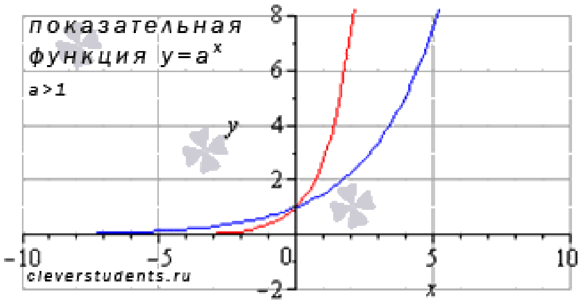
Лекция: Показательная функция. Простейшие показательные уравнения.

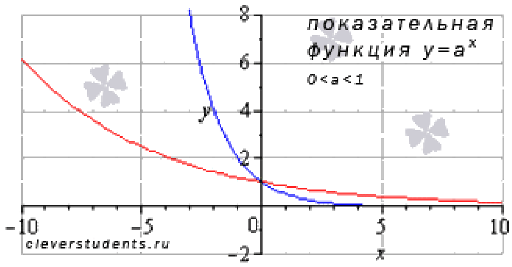
Преподаватель: Горячева А.О.

Показательной функцией называется функция вида $f(x)=a^x$, где a – некоторое положительное действительное число, называемое *основанием степени.* При $a=1$ значение показательной функции при любом значении аргумента равно единице, и случай $a=1$ далее не будет рассматриваться.

Свойства:

1. Область определения функции – вся числовая прямая.
2. Область значения функции – множество всех положительных чисел.
3. При $a>1$ функция монотонно возрастает, при $a<1$ монотонно убывает.
4. Показательная функция имеет обратную функцию, называемую логарифмической функцией.
5. График любой показательной функции пересекает ось $0y$ в точке $y=1$.
6. График показательной функции – кривая, направленная вогнутостью вверх.





Показательным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное х входит только в показатели степени при некоторых постоянных основаниях.

Так как показательная функция a^x монотонна и ее область значений $(0;+\infty)$, то простейшее показательное уравнение $a^x=в$ имеет корень при $в>0$. Именно к виду $a^x=в$ надо сводить более сложные уравнения.

1.Простейшие уравнения:

а)$2^{x-5} = 16$

Приведение обеих частей к общему основанию:

$2^{x-5} = 2^4 \quad \Leftrightarrow \quad x-5 = 4,$

$x = 9.$

Ответ: 9.

б)$3^x = -9$

Так как показательная функция принимает только положительные значения, то данное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

2. Уравнения, решаемые с помощью вынесения общего множителя за скобки.

$7^x + 7^{x+2} = 350$

$7^x + 7^x \cdot 7^2 = 350$

$7^x(1+ 49) = 350$

$7^x =350:50$

$7^x = 7$

$x = 1$

Ответ: x=1.

3.Уравнения, решаемые с помощью введения новой переменной.

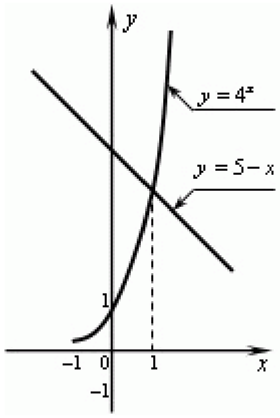
$16^x – 17 \cdot 4^x + 16 = 0$

Пусть $4^x = t$, где $t > 0$, тогда уравнение примет вид:
$t^2 - 17t + 16 = 0$
Данное квадратное уравнение является приведенным, по теореме Виета получим:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 9 \\ t_1 \cdot t_2 = 20 \end{cases}$$

$t_1=1$, $t_2=16$
Если $t_1 = 1$, то $4^x = 1$, $4^x = 4^0$, $x_1 = 0$.
Если $t_1 = 16$, то $4^x = 16$, $4^x = 4^2$, $x_2 = 2$
Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

4. Графический метод.



Решить уравнение: $4^x = 5-x$
В одной координатной плоскости строят графики функций $y = 4^x$ и $y = 5-x$
Решением уравнения является абсцисса точки пересечения графиков функций
$y = 4^x$ и $y = 5-x$
Проверка: $x = 1$, $4^1 = 5-1$, $4 = 4$ (верно)
Ответ: $x = 1$.

Примеры.

1. $3^{x^2-9x+20} = 1$

$3^{x^2-9x+20} = 3^0$

Так как $3 > 0$ и $3 \neq 1$, то

$x^2 - 9x + 20 = 0$

По теореме Виета получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 \cdot x_2 = 20 \end{cases}$$

$x_1=4$, $x_2=5$.

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = 5$.

2. $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$

Применяя соответствующие формулы свойства степеней, получим:

$3^x\, 3^{-1} – 3^x + 3^x\, 3 = 63$

Выносим общий множитель за скобки:

$3^x(\frac{1}{3} - 1 + 3) = 63$

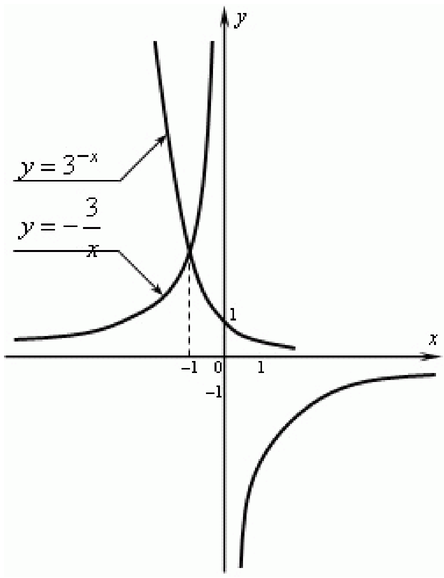
$3^x\, \frac{7}{3} = 63$

$3^x = \frac{63 \cdot 3}{7}$

$3^x = 27$

$3^x = 3^3$
$x = 3$
Ответ: $x = 3$.

3. $3^{-x} = -\frac{3}{x}$



Решением этого уравнения является точка пересечения графиков функций $y = 3^{-x}$ и $y = -\frac{3}{x}$

Ответ: $x=-1$.

4. $64^x – 8^x – 56 = 0$
$(8^2)^x – 8^x – 56 = 0$ или
$(8^x)^2 – 8^x – 56 = 0$

Введем новую переменную $t = 8^x$, тогда уравнение примет вид:

$t^2 – t – 56 = 0$

По теореме Виета:

$t_1 + t_2 = 1$

$t_1 \cdot t_2 = – 56$
$t_1 = 8$, $t_2 = -7$ (не удовлетворяет, так как показательная функция принимает только положительные значения)

Если $t_1 = 8$, то $8^x = 8$, $8^x = 8^1$, $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

!!! Домашняя самостоятельная работа.

I вариант	II вариант
Решите уравнения.	Решите уравнения.
1. $5^{2-3x} = 1/25$; 2. $6^{x+2} – 2\cdot 6^x = 34$; 3. $4\cdot 2^{2x} – 5\cdot 2^x+1 = 0$; 4. $5^{2x+5} – 2^{2x+10} + 3\cdot 5^{2x+2} – 2^{2x+8} = 0$; 5. $25^x = 7^{2x;}$ 6. $3^x = -x-2/3$.	1. $4^{1-2x} = 1/16$; 2. $2^{x+3} + 3\cdot 2^{x+1} = 28$; 3. $6\cdot 3^{2x} – 3^x – 5 = 0$; 4. $3^{2x+5} – 2^{2x+7} + 3^{2x+4} – 2^{2x+4} = 0$. 5. $2^{2x} = 91^x$; 6. $5^x = -x + 6$.