Лекция: Логарифмические уравнения.

Преподаватель: Горячева А.О.

Простейшими логарифмическими уравнениями будем называть уравнения следующих видов:

$\log_a x = b,\ a > 0,\ a \neq 1.$

$\log_a f(x) = b,\ a > 0,\ a \neq 1.$

$\log_{f(x)} b = c,\ b > 0.$

Эти уравнения решаются на основании определения логарифма:

если $\log_b a = c$, то $a = b^c$**.**

Например, решить уравнение: $\log_2 x = 3$.

Решение.

Область определения уравнения $x > 0$. По определению логарифма $x = 2^3$, $x = 8$ принадлежит области определения уравнения.

Ответ: $x = 8$.

✓ ***Уравнения вида*** $\mathbf{\log_a f(x) = b,\ a > 0,\ a \neq 1.}$

Уравнения данного вида решаются по определению логарифма с учётом области определения функции $f(x)$. Уравнение равносильно следующей системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = a^b. \end{cases}$$

Обычно область определения находится отдельно, и после решения уравнения $f(x) = a^b$ проверяется, принадлежат ли его корни области определения уравнения.

Пример: $\log_3(5x - 1) = 2$.

Решение:

ОДЗ: $5x - 1 > 0$; $x > 1/5$.

$\log_3(5x - 1) = 2,$

$\log_3(5x - 1) = \log_3 3^2,$

$5x - 1 = 9,$

$x = 2.$

Ответ: 2.

Пример. Решить уравнение:

$$\log_{\frac{1}{9}}(2x^2 - 2x - 1) = -\frac{1}{2}.$$

Решение:

Область определения уравнения находится из неравенства $2x^2 - 2x - 1 > 0$. Воспользуемся определением логарифма:

$$2x^2 - 2x - 1 = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Применим правила действий со степенями, получим $2x^2 - 2x - 1 = 3$. Это уравнение имеет два корня $x = -1$; $x = 2$. Оба полученные значения неизвестной удовлетворяют неравенству $2x^2 - 2x - 1 > 0$, т.е. принадлежат области определения данного уравнения, и, значит, являются его корнями.

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

✓ ***Уравнения вида*** $\mathbf{\log_{f(x)} b = c, b > 0.}$

Уравнения этого вида решаются по определению логарифма с учётом области определения уравнения. Данное уравнение равносильно следующей системе

$$\begin{cases} b > 0, \\ f(x) > 0, f(x) \neq 1, \\ (f(x))^c = b. \end{cases}$$

Чаще всего, область определения логарифмического уравнения находится отдельно, и после решения уравнения $(f(x))^c = b$ или равносильного уравнения

$$f(x) = b^{\frac{1}{c}}$$

проверяется, принадлежат ли его корни найденной области.

Пример. Решить уравнение

$$\log_{x-1} 9 = 2.$$

Решение.

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-1 > 0,\ x-1 \neq 1, \\ (x-1)^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1,\ x \neq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ. $x = 4$.

✓ ***Потенцирование.***

Суть метода заключается в переходе от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$, которое обычно *не равносильно* исходному.

✓ ***Уравнения вида*** $\mathbf{\log_a f(x) = \log_a g(x)},\ \mathbf{a > 0, a \neq 1.}$

На основании свойства монотонности логарифмической функции заключаем, что $f(x) = g(x)$.

Переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению

$f(x) = g(x)$ называется *потенцированием*.

Нужно отметить, что при таком переходе может нарушиться равносильность уравнения. В данном уравнении $f(x) > 0$, $g(x) > 0$,а в полученном после потенцирования эти функции могут быть как положительными, так и отрицательными. Поэтому из найденных корней уравнения $f(x) = g(x)$ нужно отобрать те, которые принадлежат области определения данного уравнения. Остальные корни будут посторонними.

Пример. Решить уравнение

$$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x).$$

Решение.

Область определения уравнения найдётся из системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0, \\ 7 - 2x > 0. \end{cases}$$

Потенцируя данное уравнение, получаем $x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$, $x^2 - x - 12 = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Число 4 не удовлетворяет системе неравенств.

Ответ. $x = -3$.

✓ ***Сведение уравнений к виду log $_a$ f(x) = log $_a$ g(x) с помощью свойств логарифмов по одному основанию.***

Если уравнение содержит логарифмы по одному основанию, то для приведения их к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ используются следующие свойства логарифмов:

- $\log_b a + \log_b c = \log_b (ac)$, где $a > 0$; $c > 0$; $b > 0$, $b \neq 1$,
- $\log_b a - \log_b c = \log_b (a/c)$, где $a > 0$; $c > 0$; $b > 0$, $b \neq 1$,
- $m \log_b a = \log_b a^m$, где $a > 0$; $b > 0$, $b \neq 1$; $m \in R$.

Пример . Решить уравнение: $\log_6 (x - 1) = 2 - \log_6 (5x + 3)$.

Решение:

Найдём область определения уравнения из системы неравенств

$$\begin{cases} x-1>0; \\ 5x+3>0. \end{cases} \quad \begin{cases} x>1; \\ x>-0{,}6. \end{cases} \quad x>1.$$

Применяя преобразования, приходим к уравнению

$$\log_6(x-1)+\log_6(5x+3)=2,$$

$\log_6((x-1)(5x+3))=2$, далее, потенцированием, к уравнению $(x-1)(5x+3)=36$, имеющему два корня $x=-2{,}6$; $x=3$. Учитывая область определения уравнения, $x=3$.

Ответ. $x=3$.