Лекция: Корень n-й степени, его свойства.

Преподаватель: Горячева А.О.

Арифметическим корнем n-й степени из числа a называют неотрицательное число , n-я степень которого равна a.

Обозначается арифметический корень n-й степени из числа a - $\sqrt[n]{a}$, где n- показатель корня, a- подкоренное выражение. Знак $\sqrt{\ }$ называют еще радикалом.

Арифметический корень второй степени называется корнем квадратным и обозначается $\sqrt{\ }$, арифметический корень третьей степени называется кубическим корнем и обозначается $\sqrt[3]{\ }$.

Например :

а) $\sqrt[3]{8} = 2, т.к. 2^3 = 8$ и 2≥0; б) $\sqrt[4]{81} = 3, т.к. 3^4 = 81$ и 3≥0;

в) $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7} т.к. \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49} и \frac{5}{7} \geq 0.$

Из определения арифметического корня n-й степени следует, что при четом n подкоренное выражение должно быть больше или равно нулю, а значит и значение такого корня тоже неотрицательно, например:

арифметический корень 4-й степени из числа -81 не существует, так как ни одно число в четвертой степени не даст -81 (при возведении в четную степень значение выражения всегда неотрицательно).

При нечетном показателе корня подкоренное выражение может быть отрицательным, и тогда минус может быть вынесен за знак коня.

Например: $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3;$
$\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2.$

Уравнение x^n=a.

Уравнение x^n=a при нечетном n имеет единственное решение x=$\sqrt[n]{a}$.

Например : x^3=-125;

x=$\sqrt[3]{-125}$;

x=-$\sqrt[3]{125}$;

x=-5.

Уравнение x^n=a при четном n имеет и положительном a имеет два корня

x=±$\sqrt[n]{a}$.

Например:

x^4=16;

x_1=$\sqrt[4]{16}$; x_2=-$\sqrt[4]{16}$;

x_1=2; x_2=-2.

Можно убедиться при проверке, что 2^4=16 и $(-2)^4$=16.

Ответ : ±2.

Иногда нужно применить такое свойство арифметического корня n-й степени:

|x|, если n четно;

$\sqrt[n]{x^n}$ = x, если n нечетно.

x, если x≥0;

Вспомним, что |x|= -x, если x<0.

Например :

$\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} = \left|\sqrt{3}-2\right|.$

Так как $\sqrt{3} \approx 1{,}7, mo \sqrt{3}-2 < 0$, следовательно

$$\left|\sqrt{3}-2\right| = -\left(\sqrt{3}-2\right) = -\sqrt{3}+2 = 2-\sqrt{3}.$$

Основные свойства корней:

1. $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$
2. $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$
5. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
6. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
7. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$
8. Если $a > b$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Для арифметического корня n-й степени, как и для квадратного корня, существуют операции внесения множителя под знак корня и вынесение множителя из-под знака корня.

Например :

$$2\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{2^3 a} = \sqrt[3]{8a}.$$

Из примера видно, что для внесения множителя под знак корня n-й степени его нужно возвести в n-ю степень. Нужно помнить, что под знак с четным показателем мы имеем право внести только положительный множитель, например:

$$-a^3\sqrt[4]{3в} = -\sqrt[4]{\left(a^3\right)^4 \cdot 3в} = -\sqrt[4]{3a^{12}в}.$$

Аналогично производится вынесение множителя из-под знака корня , например:

а) $\sqrt[3]{27a^2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{a^2} = 3\sqrt[3]{a^2}$;

б) $\sqrt{5a^6c} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{5c} \cdot \sqrt{\left(a^3\right)^2} = \sqrt{5c} \cdot |a|^3$;

в) $\sqrt[3]{54a^{10}} = \sqrt[3]{27 \cdot 2 \cdot a^9 a} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2a} \cdot \sqrt[3]{\left(a^3\right)^3} = 3a^3\sqrt[3]{2a}$;

Устно:

1. Вычислить: а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[4]{16}$; в) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$;

2. Решить уравнение: а) $x^6=5$; б) $x^3=5$; в) $0{,}01x^3+10=0$.

Примеры решения упражнений:

Вычислить: а) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$; б) $\frac{\sqrt[5]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; в) $\frac{2\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{243}}$; г) $\frac{\sqrt[3]{250}}{4\sqrt[3]{2}}$.

Решение:

в) $\frac{2\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{243}} = \frac{2}{1} \cdot \sqrt[4]{\frac{48}{243}} = \frac{2}{1} \cdot \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$;

№4

Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{a^6в^3c^{12}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{16x^4y^{16}}{a^8}}$ если $x>0$;

в) $\frac{\sqrt{567к^3}}{\sqrt{7к^{15}}}$ если $к>0$; г) $\sqrt[5]{\frac{n^4}{8m^3}} : \sqrt[5]{\frac{4m^2}{n}}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{a^6 в^3 c^{12}} = \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{в^3} \cdot \sqrt[3]{c^{12}} = \sqrt[3]{\left(a^2\right)^3} \cdot \sqrt[3]{в^3} \cdot \sqrt[3]{\left(c^4\right)^3}$;

так как 3- нечетное число, получим

$a^2 вc^4$.

Ответ: $a^2 вc^4$.

б) $\sqrt[4]{\dfrac{16x^4 y^{16}}{a^8}} = \dfrac{\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{y^{16}}}{\sqrt[4]{a^8}} = \dfrac{2\sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{\left(y^4\right)^4}}{\sqrt[4]{\left(a^2\right)^4}}$;

Так как 4-нечетное число, то получим

$\dfrac{2|x| \cdot \left|y^4\right|}{\left|a^2\right|}$

Так как x>0 по условию, то $|x| = x$;

$y^4 \geq 0$ (так как 4-четное число), следовательно $\left|y^4\right| = y^4$,

аналогично рассуждая, получим $\left|a^2\right| = a^2$.

Итого получим:

$\dfrac{2xy^4}{a^2}$.

Ответ: $\dfrac{2xy^4}{a^2}$.

в) $\dfrac{\sqrt{567к^3}}{\sqrt{7к^{15}}} = \sqrt{\dfrac{567к^3}{7к^{15}}} = \sqrt{\dfrac{81}{к^{12}}} = \dfrac{9}{\sqrt{\left(к^6\right)^2}} = \dfrac{9}{\left|к^6\right|}$;

так как к>0, то $к^6>0$, следовательно $\left|к^6\right| = к^6$.

Итого получим: $\dfrac{9}{к^6}$.

Ответ: $\dfrac{9}{к^6}$.

г) $\sqrt[5]{\dfrac{n^4}{8m^3}} : \sqrt[5]{\dfrac{4m^2}{n}} = \sqrt[5]{\dfrac{n^4}{8m^3} \div \dfrac{4m^2}{n}} = \sqrt[5]{\dfrac{n^4}{8m^3} \cdot \dfrac{n}{4m^2}} = \sqrt[5]{\dfrac{n^5}{32m^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{n^5}}{\sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{m^5}} = \dfrac{n}{2m}$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Вычислить: а) $\sqrt[3]{-216}$; б) $\sqrt[5]{32}$; в) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{8}}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{625}}$.

2. Решите уравнение: а) $x^3=64$; б) $x^4-81=0$; в) $16x^4-1=0$; г) $12\dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4}x^2 = 0$.

3. Вычислить: а) $\sqrt[3]{0{,}008 \cdot 27}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{4\sqrt[3]{2}}$; в) $\dfrac{5\sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{136}}$; г) $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$.

4. Упростите выражение: а) $\sqrt[7]{2^{14} q^{28}}$; б) $\sqrt[5]{11^5 d^{10}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{375n^2}}{\sqrt[3]{3n^{14}}}$; г) $\sqrt[4]{8x^3 y^5} \cdot \sqrt[4]{2xy^7}$;

д) $\sqrt[5]{\dfrac{8c^2}{d}} : \sqrt[5]{\dfrac{d^9}{4c^3}}$; е) $\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}$.

5. Вынесите множитель из-под знака корня: а) $\sqrt[5]{-128a^7}$; б) $\sqrt[4]{6a^{12} в^6}$.