«Решение задач с помощью графиков функций»

Выполнил:
учитель математики
гимназии №22
г. Майкопа
Плеснявых Е. А.

Использование графиков функций при решении задач

Графический метод решения задач применим ко многим типам задач. Особенно эффективен при решении уравнений или систем уравнений, при нахождении множества значений функции, при решении уравнений с параметром, где требуется найти количество корней в зависимости от параметра.

Для успешного применения этого метода необходимо уметь безошибочно строить графики и понимать, как влияют на их расположения и вид изменения в аналитическом задании функции.

Использование графиков функций при решении задач

Учащиеся должны уметь строить элементарные функции:

$$y = x; y = x^2; y = \frac{k}{x}; y = x^3; y = \sqrt{x}; y = \sin x;$$

$$y = \cos x; y = tgx; y = ctgx;$$

$$y = a^x (где\, a > 0; a \neq 1);$$

$$y = \log_a x (где\, a > 0; a \neq 1)$$

И выполнять с графиками этих функций преобразования.

Рассмотрим функцию

$$y = f(x)$$

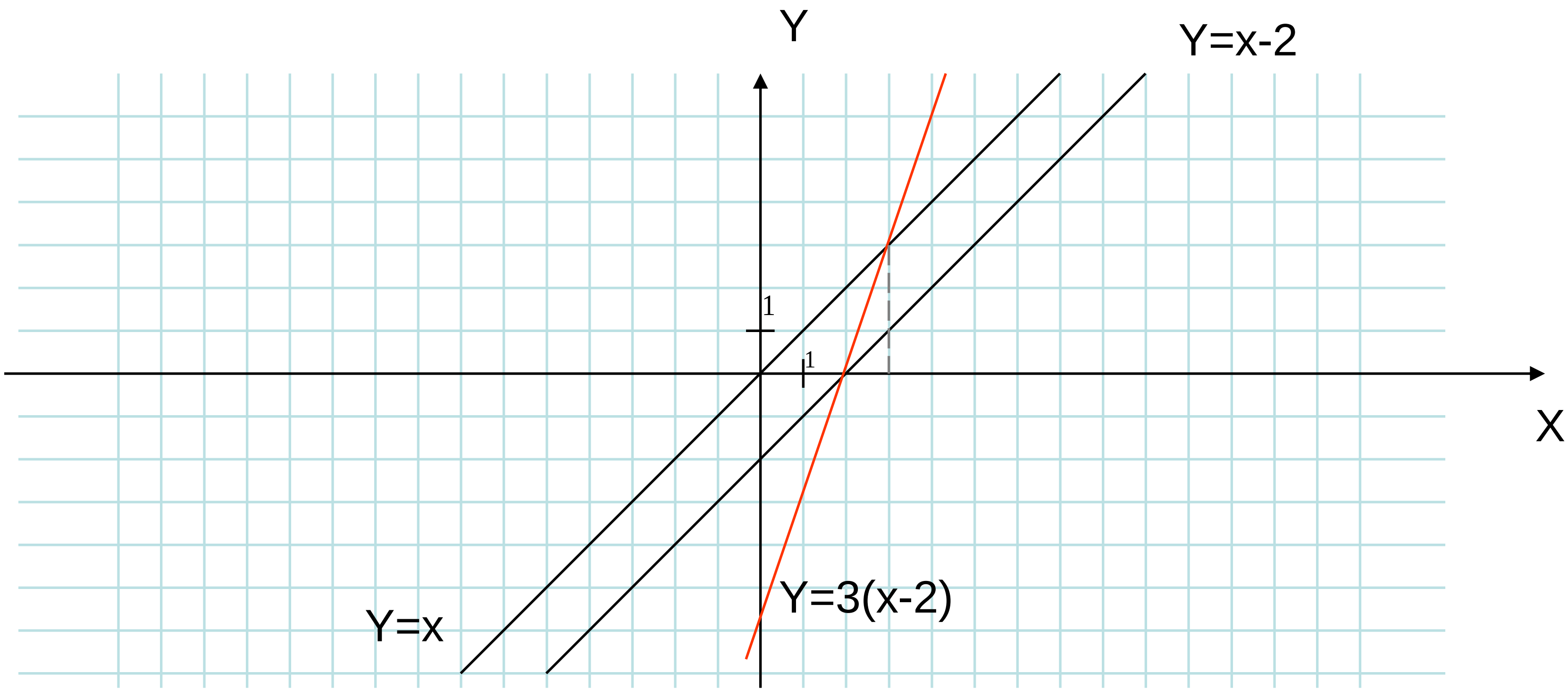
И выполним некоторые преобразования.

Вид функции	Преобразования
1) $y=-f(x)$	Симметрия относительно оси OX
2) $y=f(-x)$	Симметрия относительно оси OY
3) $y=f(x+b)$	Сдвиг вдоль оси OX на |b| единиц влево, если b>0; Вправо, если b<0
4) $f(x)+b$	Сдвиг вдоль оси OY на |b| единиц вверх, если b>0; вниз, если b<0
5) $y=f(kx)$	Сжатие к оси OY в k раз, если k>1; Растяжение в $\frac{1}{k}$ раз от оси OY, если 0<k<1
6) $y=kf(x)$	Растяжение от оси OX в k раз, если k>1; сжатие к оси OX в $\frac{1}{k}$ раз, если 0<k<1
7) $y=f(\|x\|)$	1) Строим график y=f(x) для x>0 2) Достраиваем для x<0 часть графика симметричную построенной относительно оси OY
8) $y=\|f(x)\|$	1) Строим график y=f(x) 2) На участках, где f(x)<0 строим кривые, симметрично построенным относительно оси OX

С помощью этой таблицы построим графики

1) $y = 3x - 6;\ \ y = 3(x-2).$

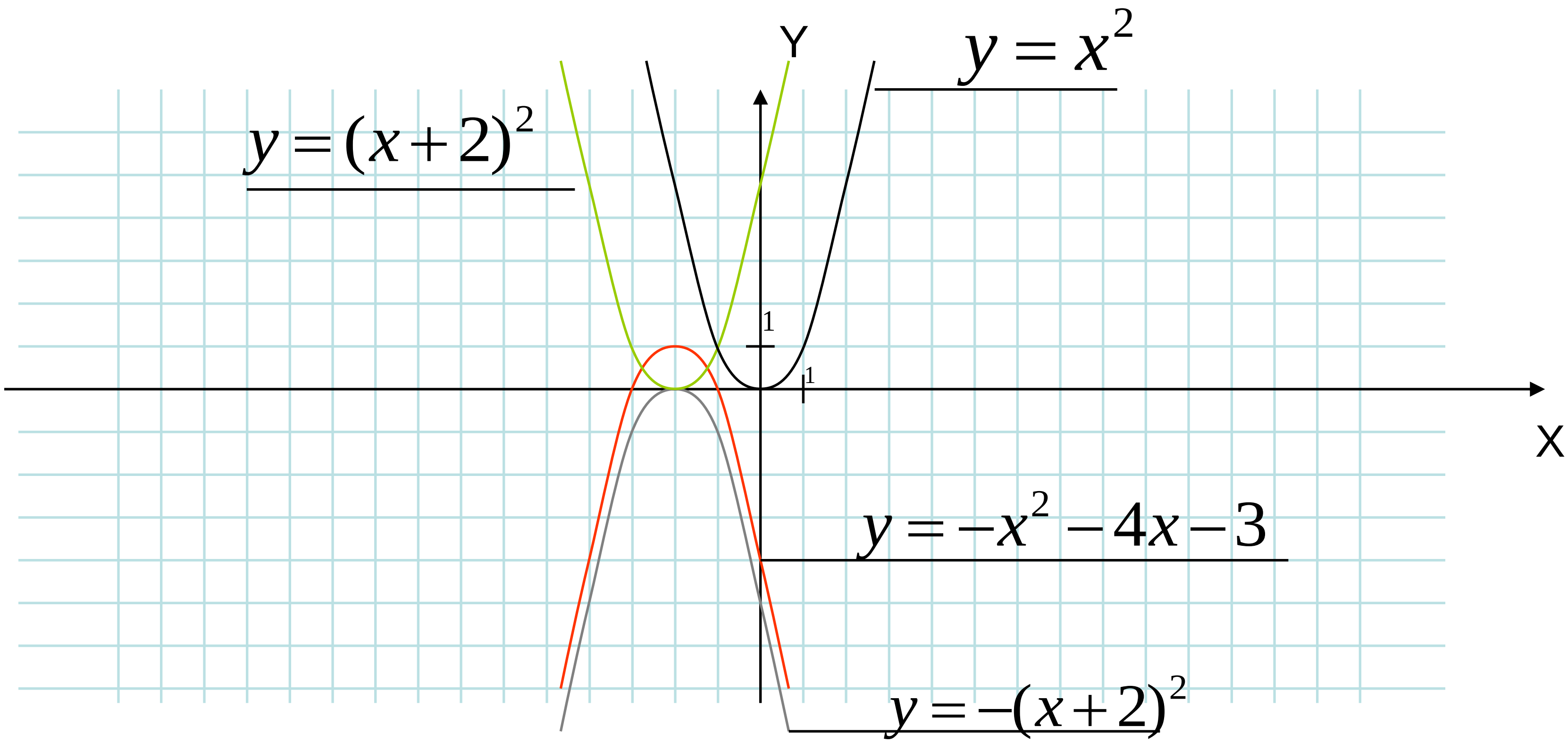
$$y = x \xrightarrow{\text{Сдвиг по оси OX вправо на 2 ед.}} y = x - 2 \xrightarrow{\text{Растяжение от оси OX в 3 раза.}} y = 3(x-2)$$



$$2)\ y=-x^2-4x-3;\ \ y=-(x+2)^2+1.$$

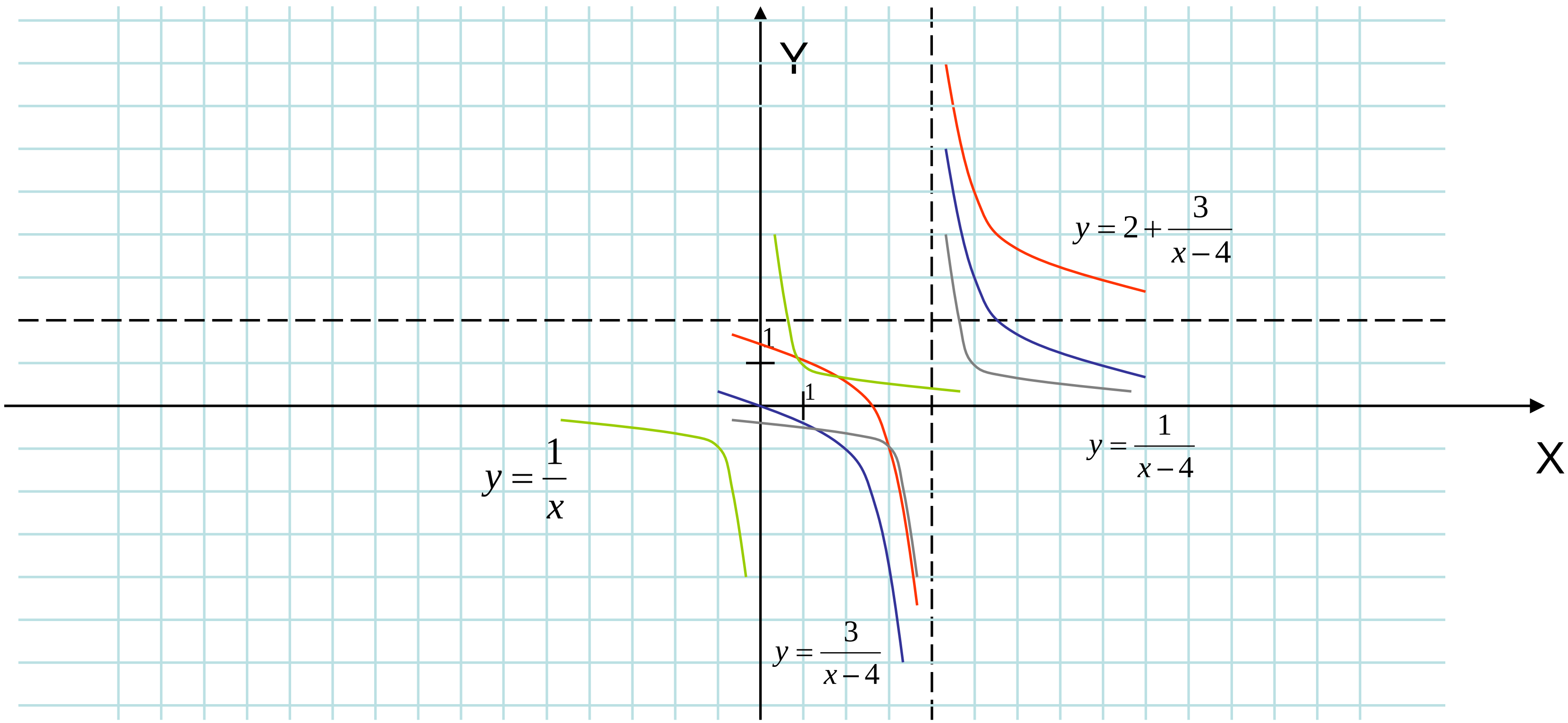
$$y=x^2 \xrightarrow{\text{Сдвиг по оси OX влево на 2 ед.}} y=(x+2)^2 \xrightarrow{\text{Симметрия относит. оси OX}} y=-(x+2)^2$$

$$\xrightarrow{\text{Сдвиг по оси OY на 1 ед. вверх}} y=-(x+2)^2+1$$



3) $y=\dfrac{2x-5}{x-4}$; $\quad \dfrac{2x-5}{x-4}=\dfrac{2(x-4)+3}{x-4}=2+\dfrac{3}{x-4}$

$$y=\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{Сдвиг по оси OX вправо на 4 ед.}} y=\frac{1}{x-4}\xrightarrow{\text{Растяжение от оси OX в 3 раза}} y=\frac{3}{x-4}\xrightarrow{\text{Сдвиг по оси OY на 2 ед. вверх}} y=2+\frac{3}{x-4}$$

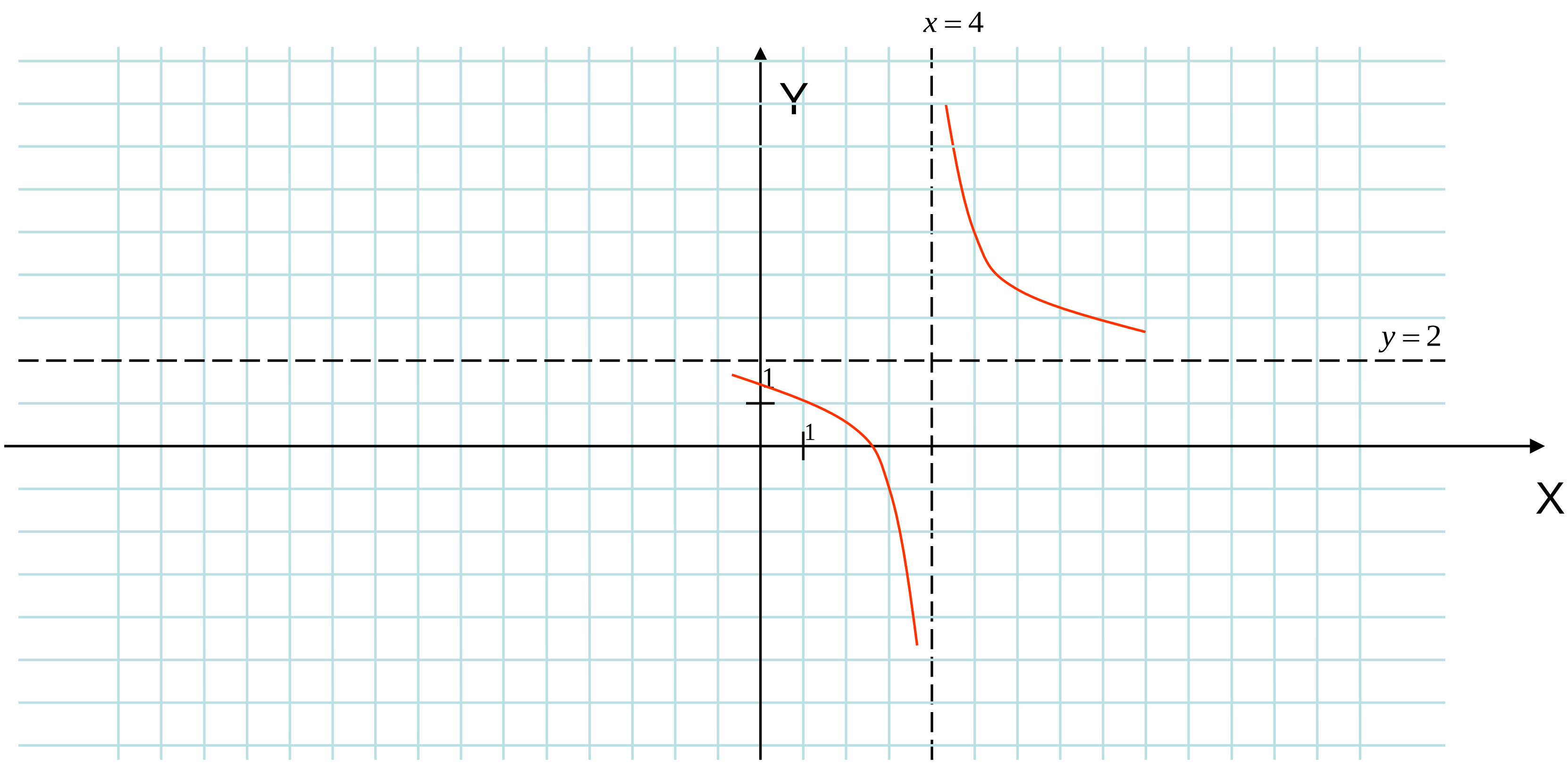


2 способ $\quad y = 2 + \dfrac{3}{x-4}$

$x = 4$ - вертикальная асимптота

$y = 2$ - горизонтальная асимптота.

Относительно этих прямых строим $y = \dfrac{3}{x}$



Графические методы решения

1) Решение уравнения.

Алгоритм

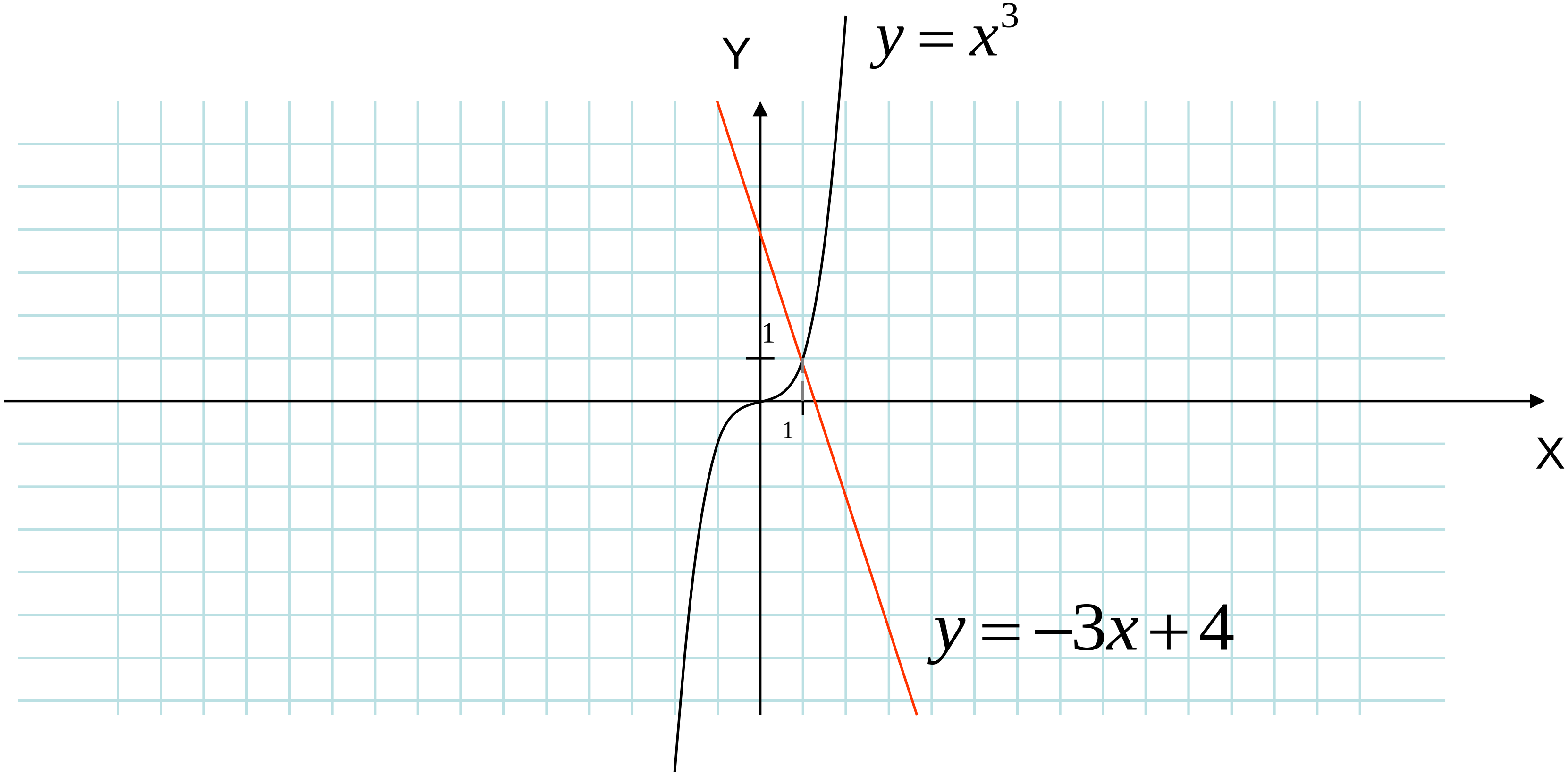
1) Преобразовать уравнение к виду f(x)=g(x), где f(x) и g(x) – функции, графики которых можно построить
2) Построить графики функций y=f(x) и y=g(x)
3) Определить абсциссы точек пересечения, они и являются решением данного уравнения.

<u>Например. 1)</u> $x^3+3x-4=0$

1) $x^3 = -3x + 4.$

2) Строю графики функций

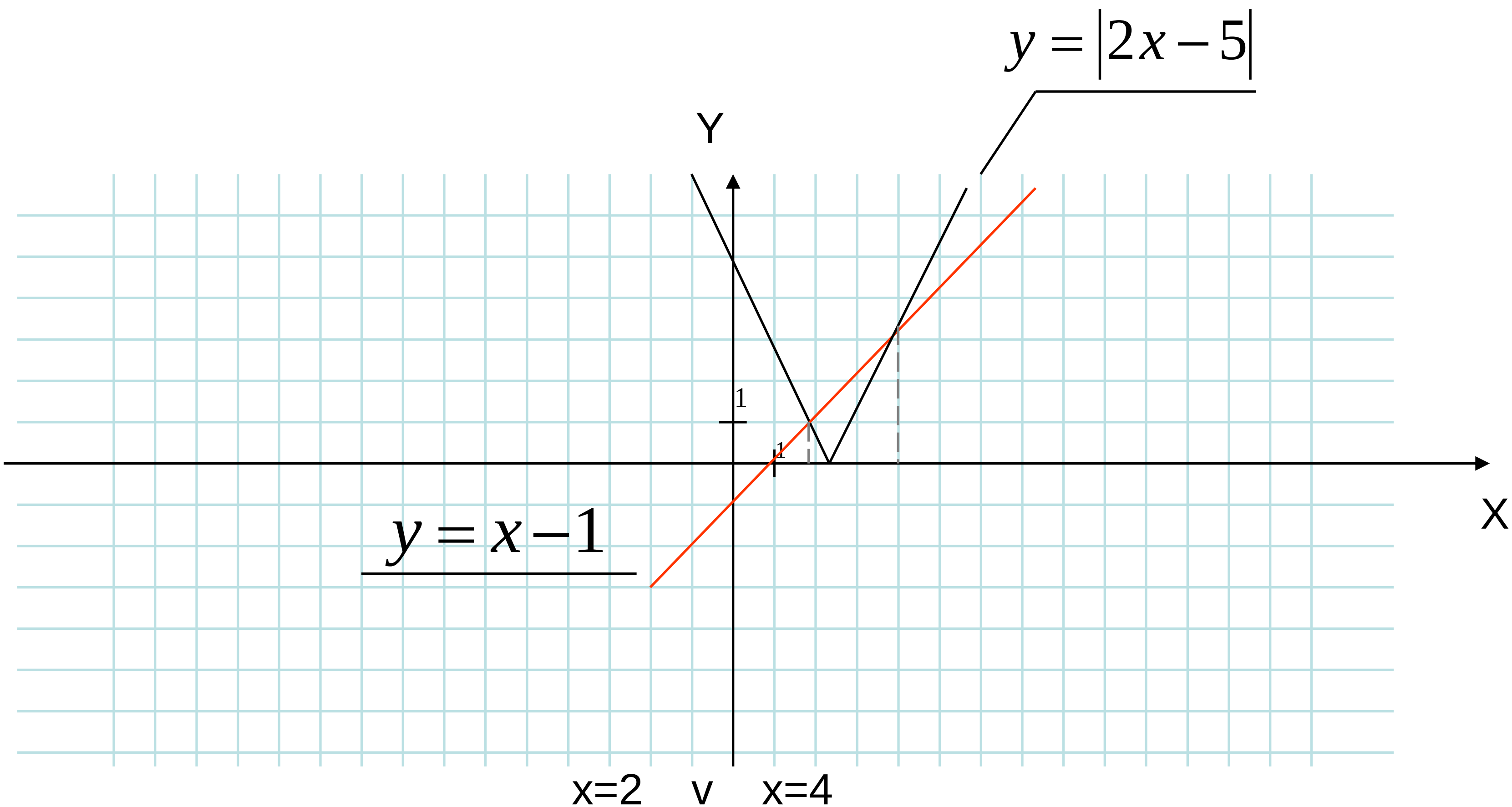
$$y = x^3 \qquad \text{и} \qquad y = -3x + 4$$



Ответ: 1.

$$2)\quad |2x-5| = x-1.$$

$$y = |2x-5| \qquad y = x-1$$



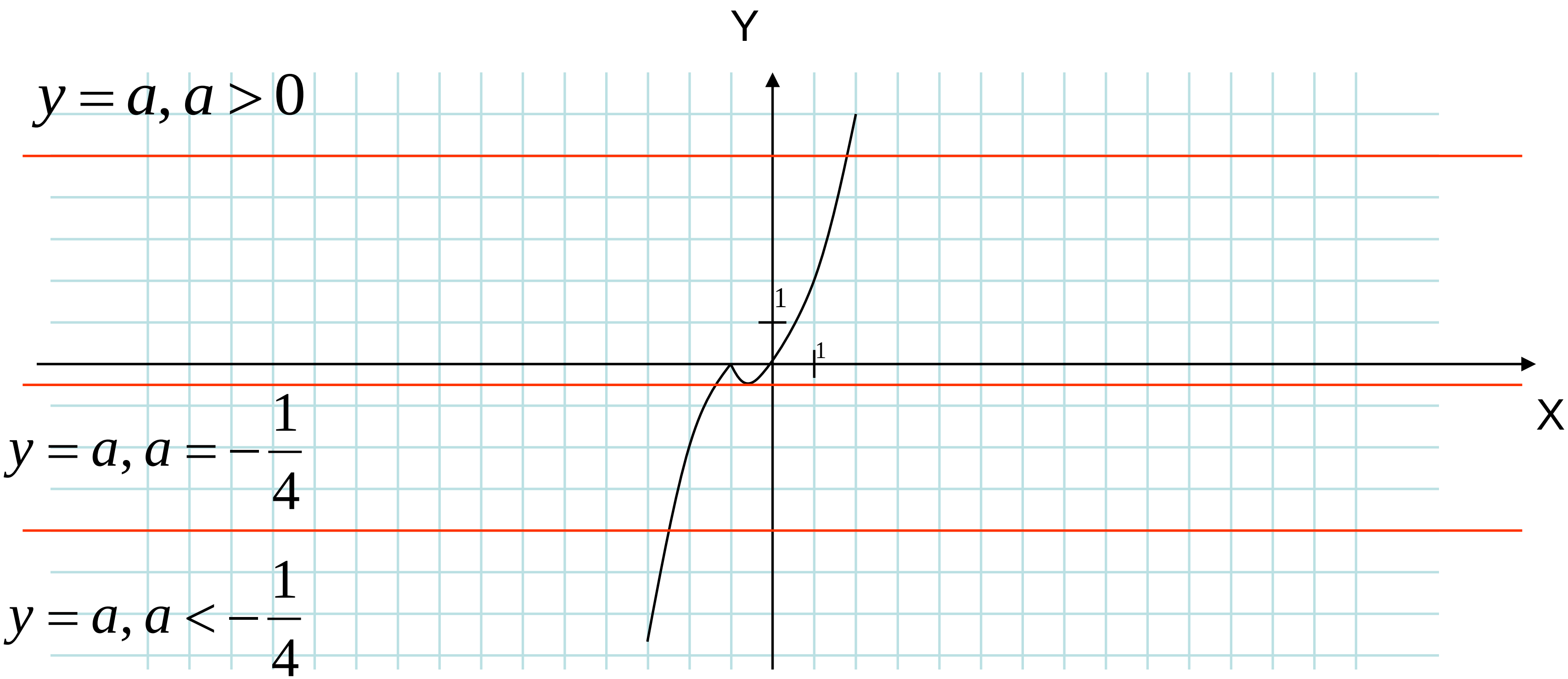
Ответ: 2;4.

3) Сколько корней имеет уравнение x|x+1|=a в зависимости от параметра a ?

1) Строю графики функций

$$y = x|x+1| \quad \text{и} \quad y = a$$

$$y = x|x+1| = \begin{cases} -x^2 - x, \ \text{при} \ x \le -1 \\ x^2 + x, \text{при x} > \text{-1} \end{cases}$$



Из рисунка видно

1) при $a < -\frac{1}{4}$ уравнение имеет одно решение

2) при $a = -\frac{1}{4}$ два решения

3) при $-\frac{1}{4} < a < 0$ 3 решения

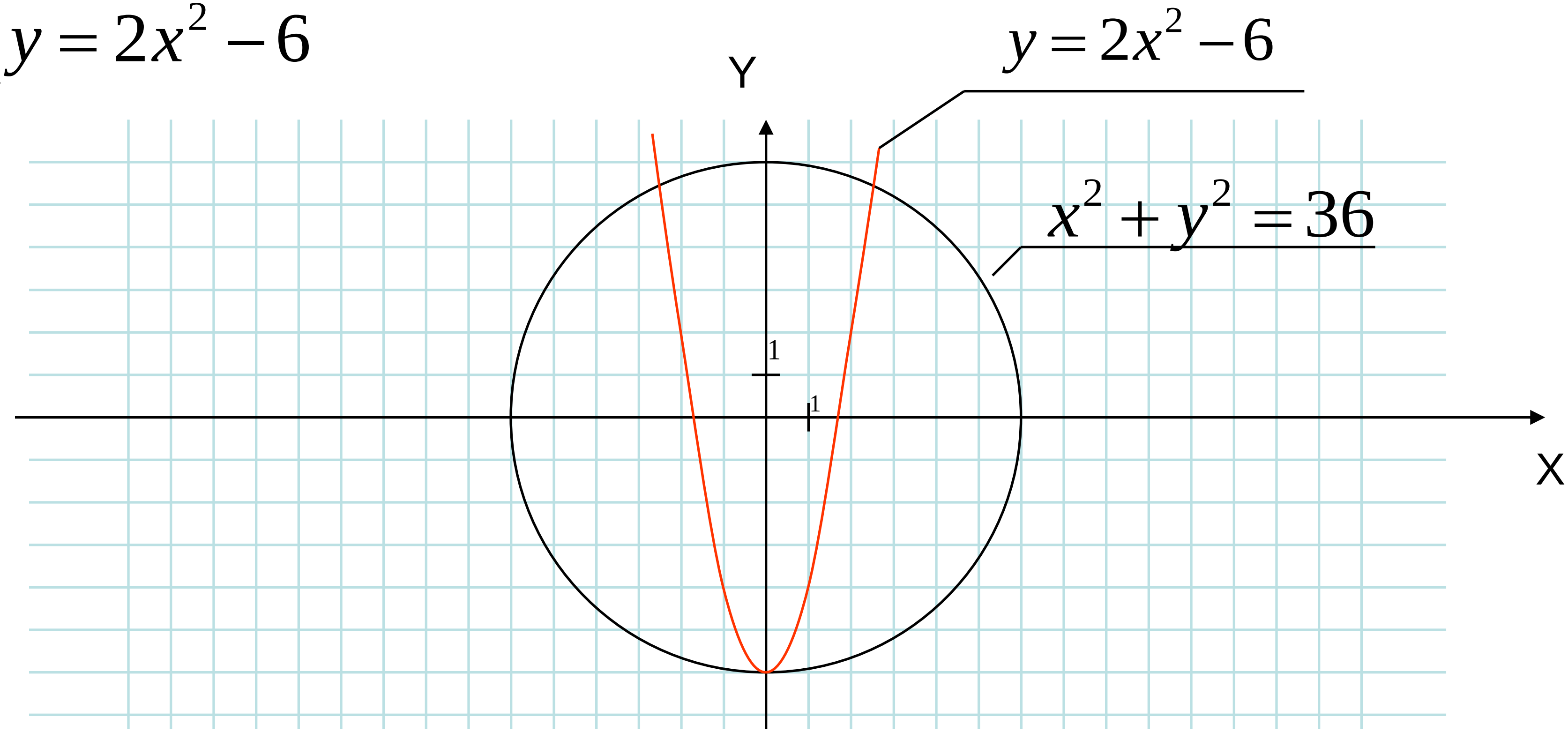
4) при $a = 0$ два решения

5) при $a > 0$ одно решение

Решение систем уравнений

Выяснить имеет ли решение система уравнений и если имеет, то сколько

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ y = 2x^2 - 6 \end{cases}$$



Из рисунка видно, что система имеет 3 решения

Решение неравенств

Алгоритм

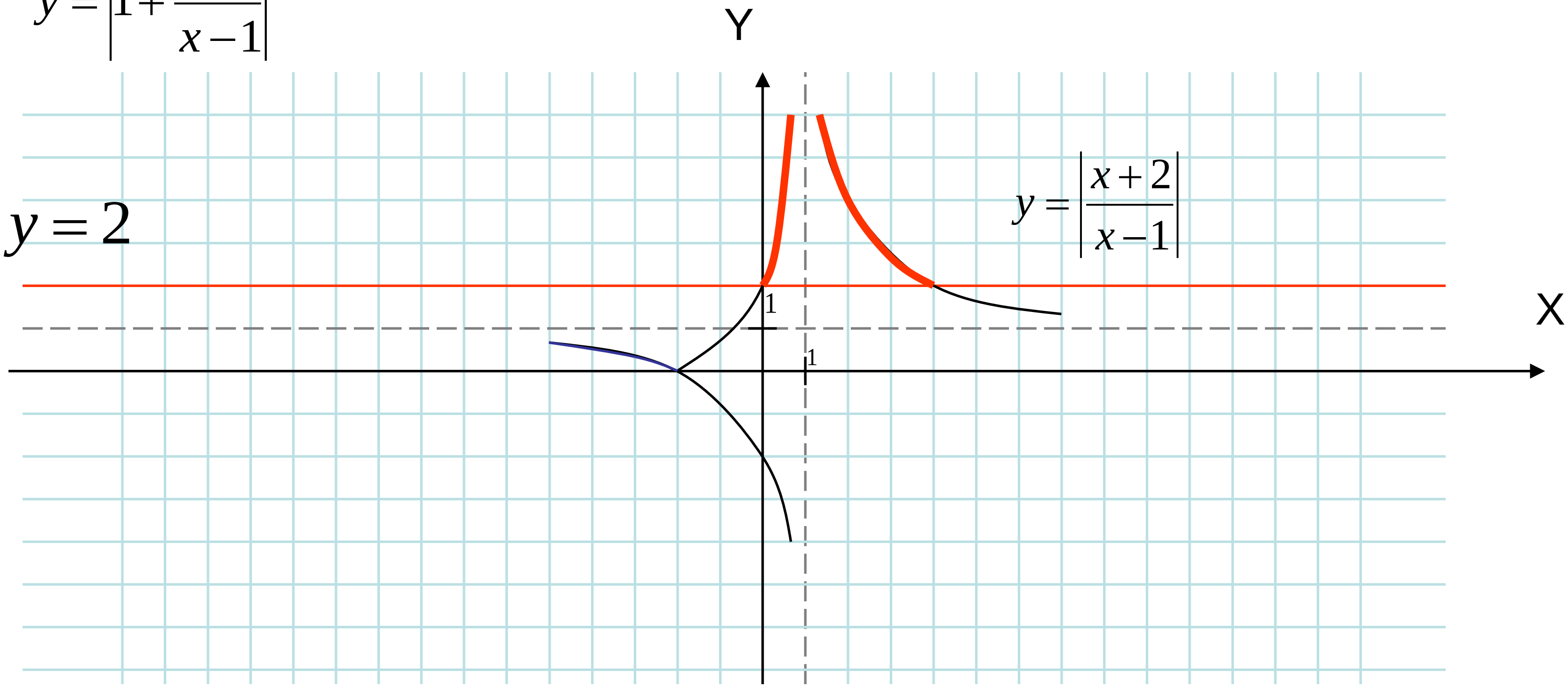
1) Преобразовать данное неравенство к виду f(x)>g(x), где f(x), g(x) функций графики которых можно построить.
2) Построить графики функций y=f(x) и y=g(x).
3) Определить абсциссы точек пересечения.
4) если неравенство f(x)>g(x), то выделить на рис. те участки графика функции y=f(x), которые лежат “выше” соответствующих участков графика функции y=g(x); если неравенство f(x)<g(x), то выделить на рис. те участки, которые лежат “ниже” соответствующих участков графика $\geq$ функции y=g(x); если неравенство f(x) g(x), то выделить на рис. те участки графика функции y=f(x), которые лежат $\leq$ “не ниже” соответствующих участков графика функции y=g(x); если неравенство f(x) g(x), то выделить на рис. те участки графика функции y=f(x), которые лежат “не выше” соответствующих участков графика функции y=g(x).
5) Записать выделенные числовые промежутки
6) Совокупность всех числовых промежутков и дает решение данного неравенства.

Примеры Решить неравенство

$$\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 2.$$

1) $y = \left|\frac{x+2}{x-1}\right|$ и $y = 2$

$$y = \left|1 + \frac{3}{x-1}\right|$$

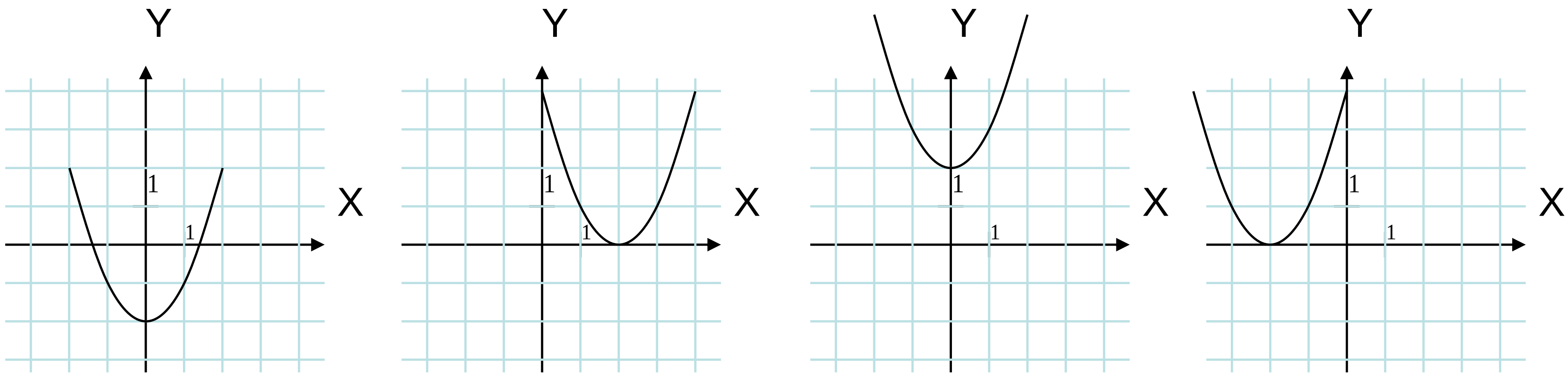


$x \in (0;1) U (1;4).$

Задания для устной работы

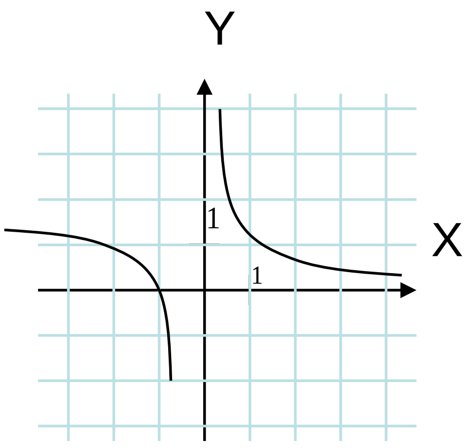
Даны функции $y = x^2 - 4; y = x^2 + 4; y = (x-4)^2; y = (x+4)^2.$

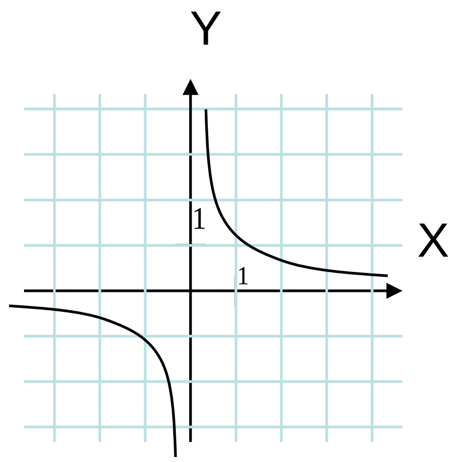
Для каждого графика указать соответствующую функцию.

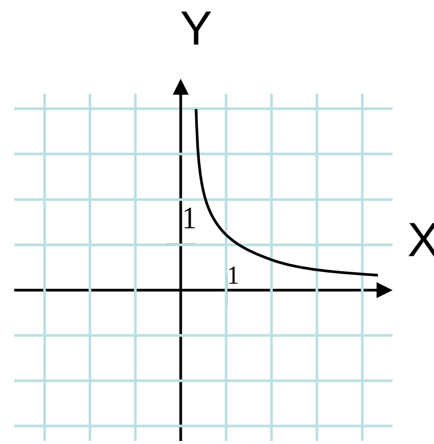


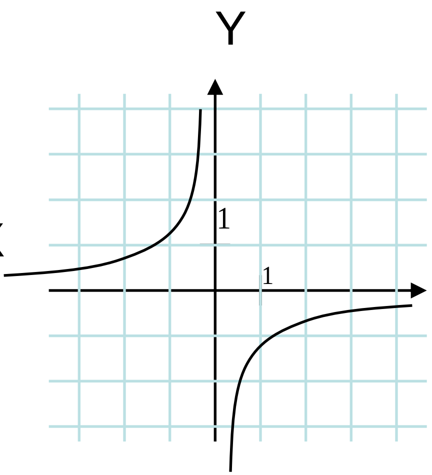
2) На оном из рисунков изображен график функции $y = \frac{1}{x^7} + 1.$

Укажите этот рисунок

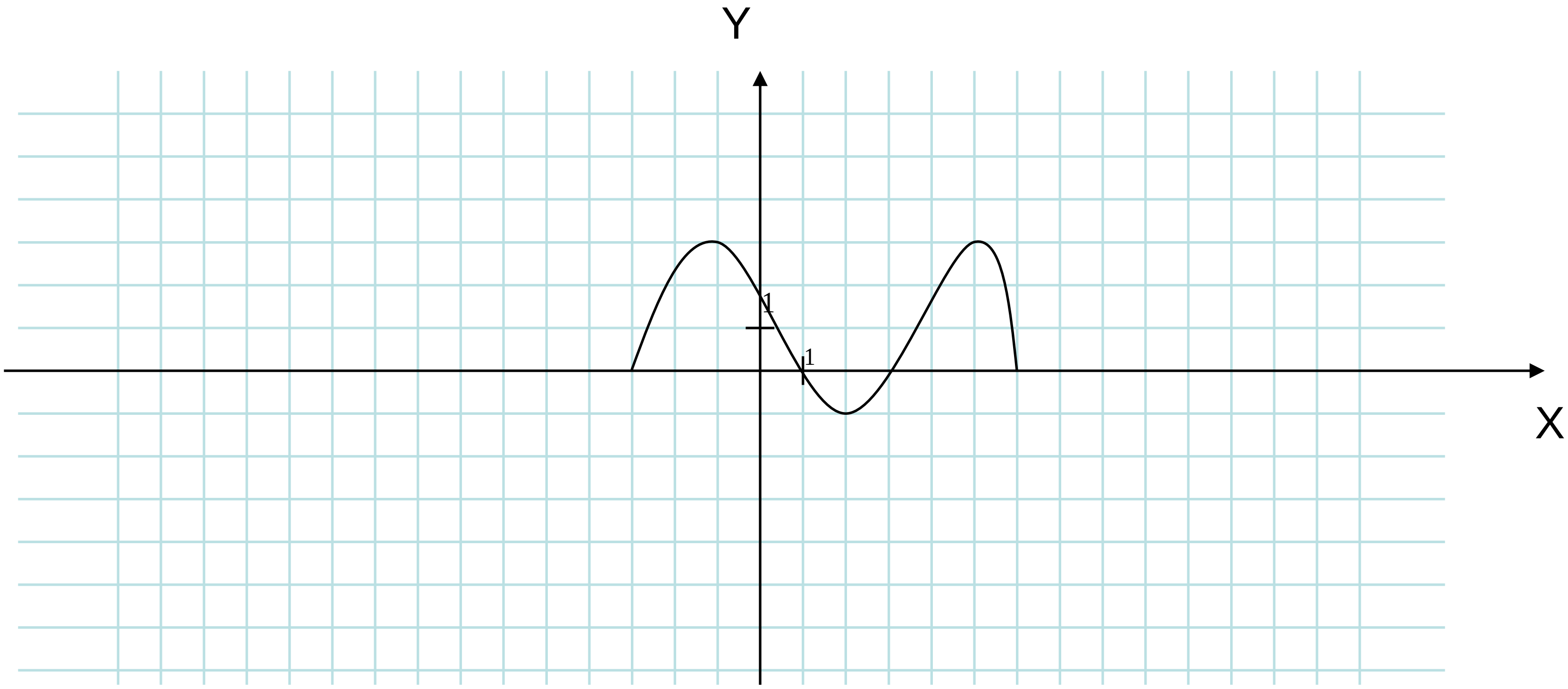








На рисунке изображен график функции $y=f(x)$.
Указать множество решений неравенства $f(x) \leq 0$



Практическая работа по теме: Построение графиков квадратичной функции

Изобразить схематически график функции

$$а)\ y = x^2 - 5;\ \ б)\ y = (x+2)^2;\ \ в)\ y(x-3)^2 + 1$$

$$г)\ y = -x^2 + 4x;\ \ д)\ y = -x^2 + 4x - 3;\ \ е)\ y = -x^2 + 4|x| - 3$$

$$ж)\ y = \left|-x^2 + 4|x| - 3\right|.$$

Творческая работа

Используя графики нарисовать рисунок.

1) $y = -\frac{3}{25}x^2 + 6,\ x \in [-4,6;4,5]$

2) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2,\ x \in [-3;3]$

3) $y = 6(x+4)^2 - 7,\ x \in [-5,1;-3]$

4) $\mathrm{y} = 6(\mathrm{x} - 4)^2 - 7,\ x \in [3;5,3]$

5) $y = (x+6)^2,\ x \in [-7,7;-4,3]$

6) $y = -24(x-5)^2 + 9,\ x \in [4,5;5,5]$

7) $y = -4(x+7)^2 + 4,\ x \in [-7,5;-6,5]$

8) $y = -4(x+5)^2 + 4,\ x \in [-5,5;-4,5]$

Задания к ЕГЭ

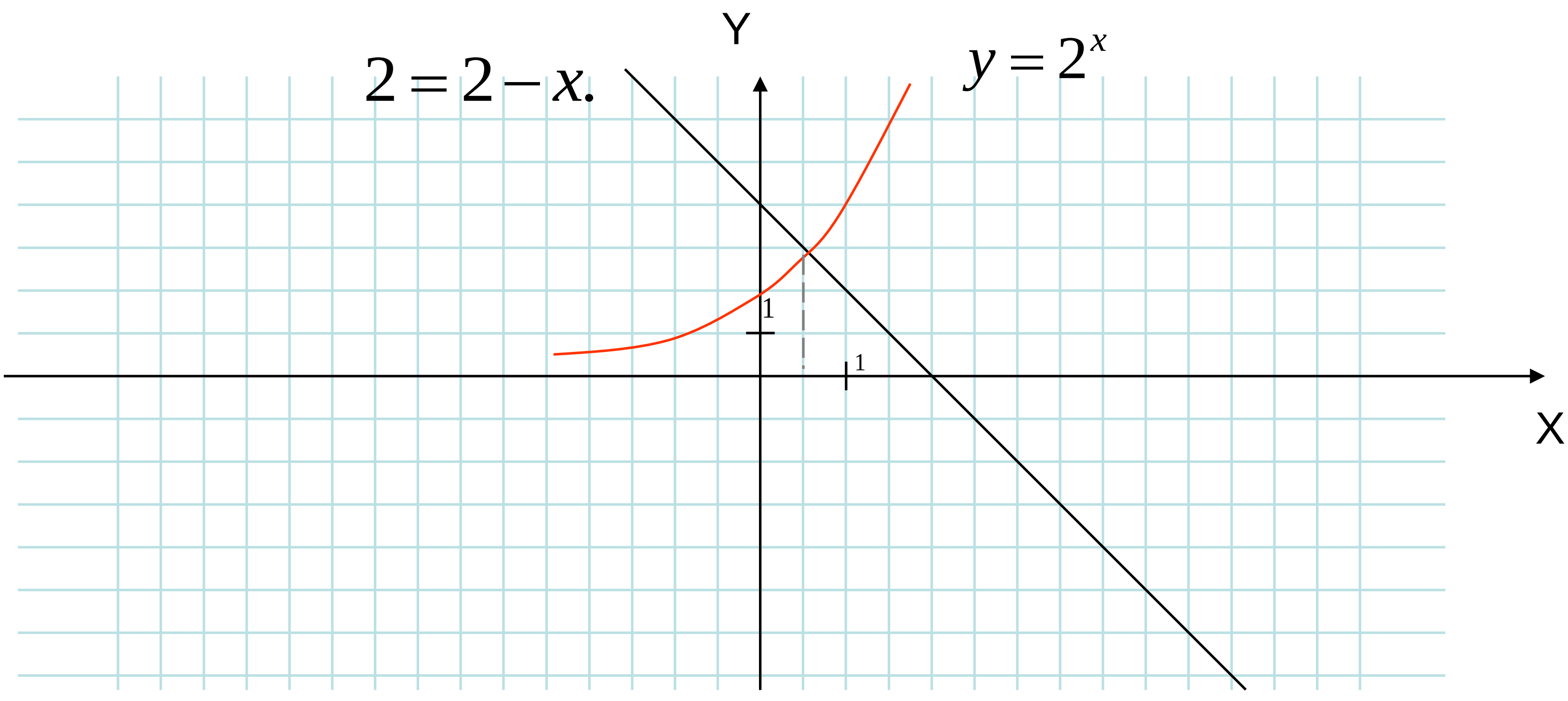
1) Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения $2^x - 2 = -x$

1) (-1;0)   2) (1;2)   3) (0;1)   4) (-∞;0)

Решение

1) $2^x = 2 - x.$

2) Строю графики функций $y = 2^x$ и $y = 2 - x.$



Из рисунка видно что $x \in (0;1).$

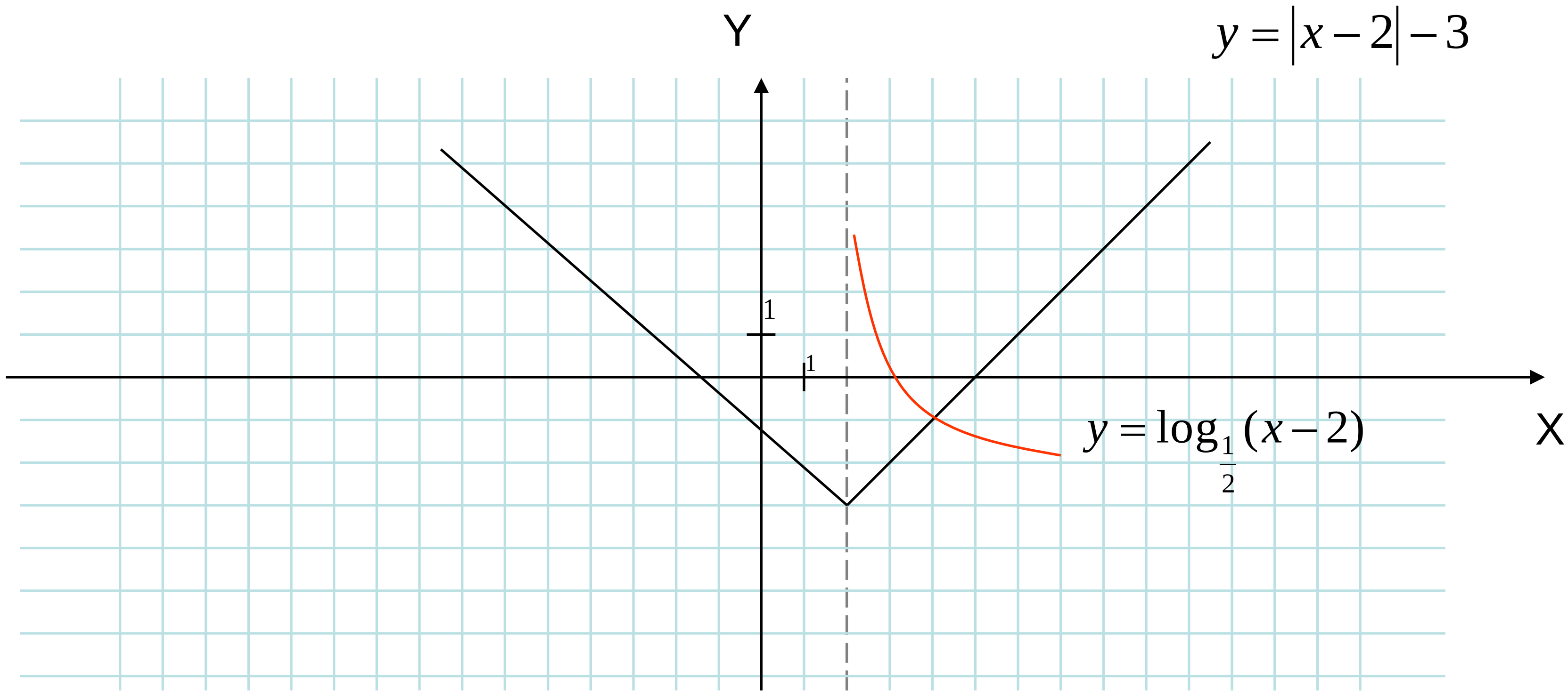
2) Пусть $(x_0; y_0)$ – решение системы

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-2) - y = 0 \\ |x-2| - y = 3 \end{cases}$$

Найти сумму $x_0 + y_0$

Решение

$$\begin{cases} y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \\ y = |x-2| - 3 \end{cases}$$



$$x_0 = 4;\ y_0 = -1$$

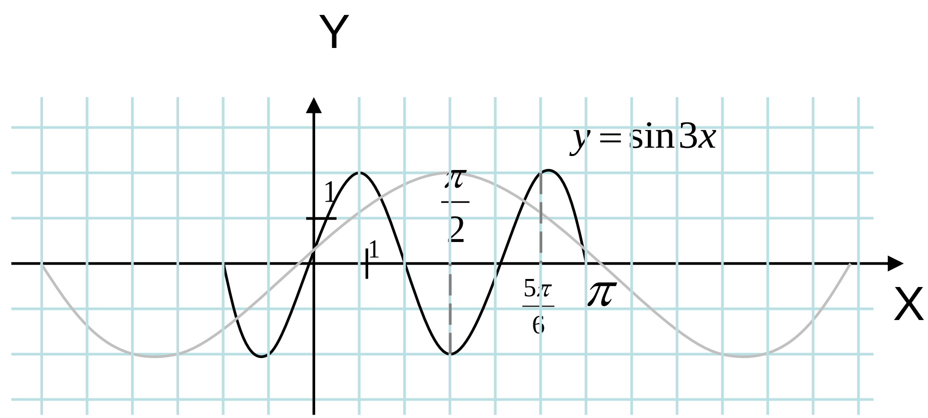
$$x_0 + y_0 = 4 - 1 = 3$$

3) Укажите промежутки возрастания функции

$y = \sin x$ на интервале $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

1) $\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ 2) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right]$ 3) $\left[\frac{5\pi}{6};\pi\right]$ 4) $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$

$y = \sin x \xrightarrow{\text{сжатие от оси OY в 3 раза}} y = \sin 3x$



На графике функции на интервале $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ есть

только один промежуток возрастания $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right]$.