

## Лекция: Построение и преобразование графиков.

**Преподаватель: Горячева А.О.**

Графики элементарных функций

**Прямая линия** - график линейной функции  $y = ax + b$ . Функция  $y$  монотонно возрастает при  $a > 0$  и убывает при  $a < 0$ . При  $b = 0$  прямая линия проходит через начало координат т. 0 ( $y = ax$  - прямая пропорциональность)/

$y = 3x + 4$  (построить)

**Парабола** - график функции квадратного трёхчлена  $y = ax^2 + bx + c$ . Имеет вертикальную ось симметрии. Если  $a > 0$ , имеет минимум, если  $a < 0$  - максимум. Точки пересечения (если они есть) с осью абсцисс - корни соответствующего квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Построение графика:

1. Найти координаты вершины параболы, выяснить направление ветвей.
2. Найти точки пересечения с осями координат.
3. Найти координаты еще 2-х контрольных точек.

$y = x^2 - x - 2$ ,  $y = 4x^2 + 17x + 1$

**Гипербола** - график функции. При  $a > 0$  расположена в I и III четвертях, при  $a < 0$  - во II и IV. Асимптоты - оси координат. Ось симметрии - прямая  $y = x$  ( $a > 0$ ) или  $y = -x$  ( $a < 0$ ).

$y = 1/2x$ ,  $y = 3/x$ .

**Дробно-линейная функция.**

$$\frac{ax+b}{cx+d}$$

Функция, которую можно задать формулой вида  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ , где буквой  $x$  обозначена независимая переменная, а буквами  $a, b, c$  и  $d$  - произвольные числа, причём  $c \neq 0$  и  $ad - bc \neq 0$ , называется дробно-линейной функцией.

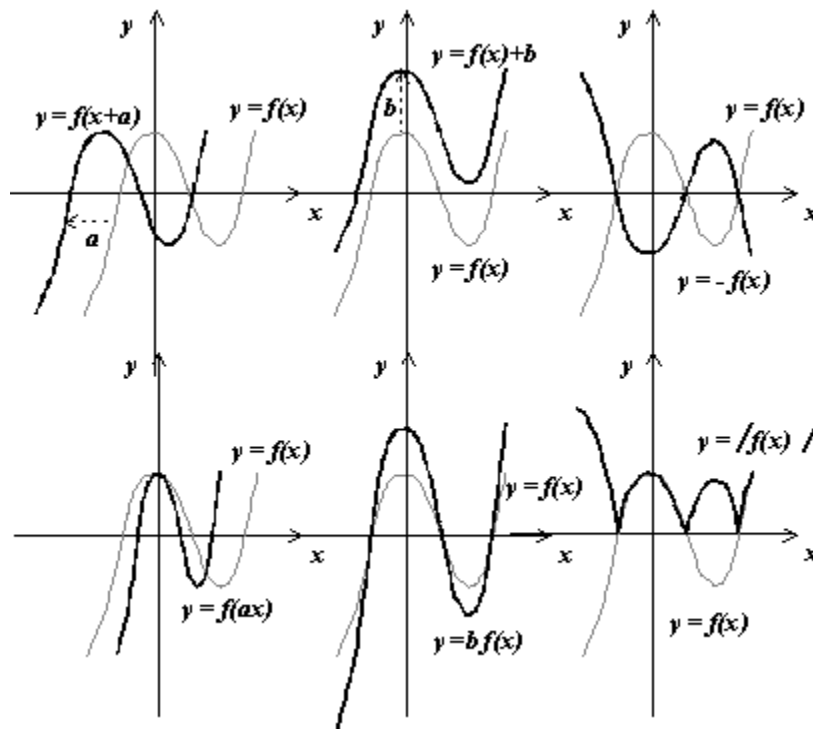
Графиком дробно-линейной функции является гипербола.

Зная, как строить графики функции  $y = f(x)$ , всегда можно построить график функции  $y = af(kx + b) + m$ .

Общий вид функции	Преобразования
	Смещение
$y = f(x + b)$	<b>Параллельный перенос графика вдоль оси абсцисс на <math> b </math> единиц:</b> влево, если $b > 0$ ; вправо, если $b < 0$ .
$y = f(x) + m$	<b>Параллельный перенос графика вдоль оси ординат на <math> m </math> единиц:</b> вверх, если $m > 0$ , вниз, если $m < 0$ .
	Отражение графика
$y = f(-x)$	<b>Симметричное отражение графика относительно оси ординат.</b>
$y = -f(x)$	<b>Симметричное отражение графика относительно оси абсцисс.</b>
	Сжатие и растяжение графика
$y = f(kx)$	<b>При <math>k &gt; 1</math> — сжатие графика к оси ординат в <math>k</math> раз, при <math>0 &lt; k &lt; 1</math> — растяжение графика от оси ординат в <math>k</math> раз.</b>
$y = kf(x)$	<b>При <math>k &gt; 1</math> — растяжение графика от оси абсцисс в <math>k</math> раз, при <math>0 &lt; k &lt; 1</math> — сжатие графика к оси абсцисс в <math>k</math> раз</b>
	Преобразования графика с модулем
$y =  f(x) $	<b>При <math>f(x) &gt; 0</math> — график остаётся без изменений, при <math>f(x) &lt; 0</math> — график симметрично отражается относительно оси абсцисс.</b>

$$y = f(|x|)$$

При  $x > 0$  — график остаётся без изменений, при  $x < 0$  — график симметрично отражается относительно оси ординат.



Существует 2 алгоритма построения графика функции вида  $y = f(x+t)+m$ ,

**Алгоритм 1:**

1. Построить график функции  $y = f(x)$ .
2. Осуществить параллельный перенос графика  $y = f(x)$  вдоль оси  $x$  на  $|t|$  масштабных единиц влево, если  $t > 0$ , и если  $t < 0$ , то - вправо.
3. Осуществить параллельный перенос полученного на втором шаге графика вдоль оси  $y$  на  $|m|$  масштабных единиц вверх, если  $m > 0$ , и вниз, если  $m < 0$ .

**Алгоритм 2:**

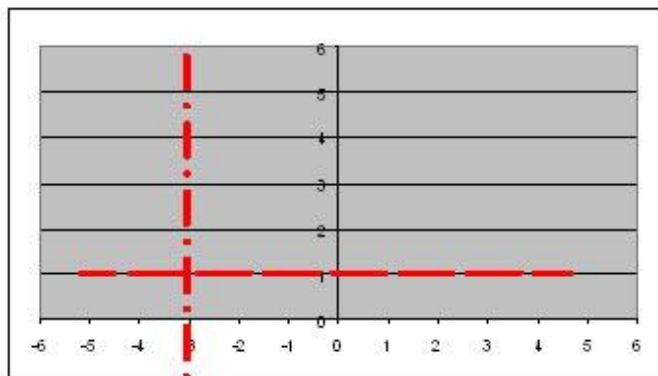
1. Перейти к вспомогательной системе координат, проведя (пунктиром) вспомогательные прямые  $x = -t$ ,  $y = m$ , т.е. выбрав в качестве начала новой системы координат точку  $(-t; m)$ .

2. К новой системе координат "привязать" график функции  $y = f(x)$ .

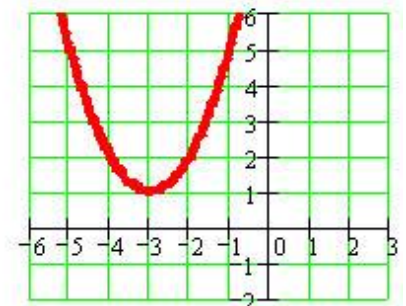
**Пример 1.** Построим график функции  $y = (x+3)^2 + 1$

Введем вспомогательную систему координат: это прямые  $x = -3$ ,  $y = 1$ . Основная функция  $y = x^2$

График функции  $y = (x+3)^2 + 1$  получается с помощью сдвига функции  $y = x^2$  на 3 масштабные единицы влево и на 1 единицу вверх.

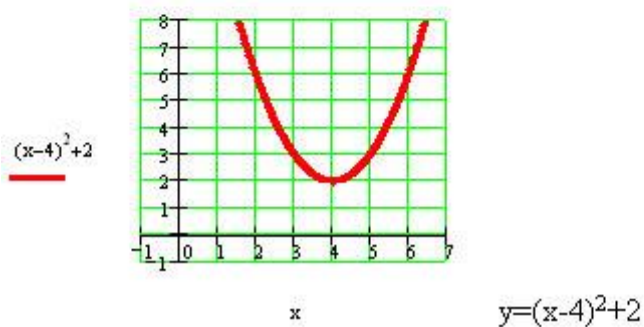
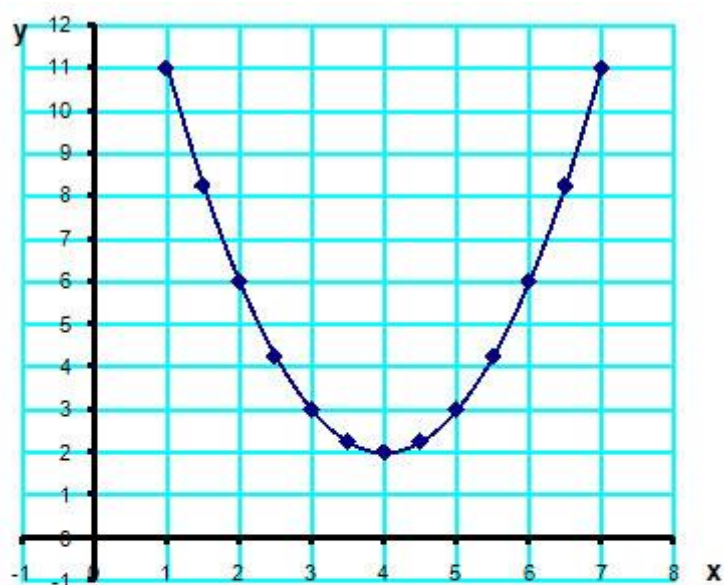


$$(x+3)^2 + 1$$



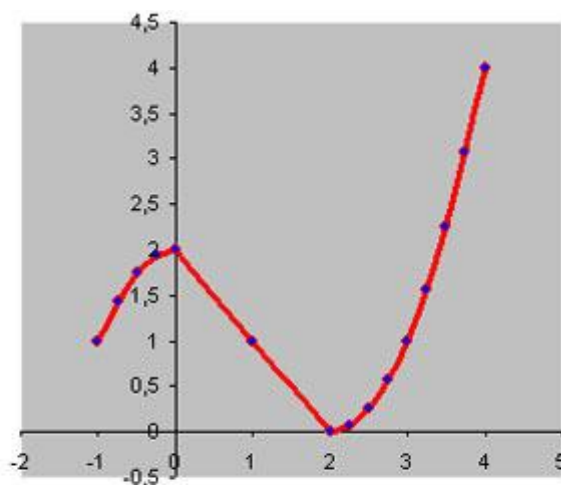
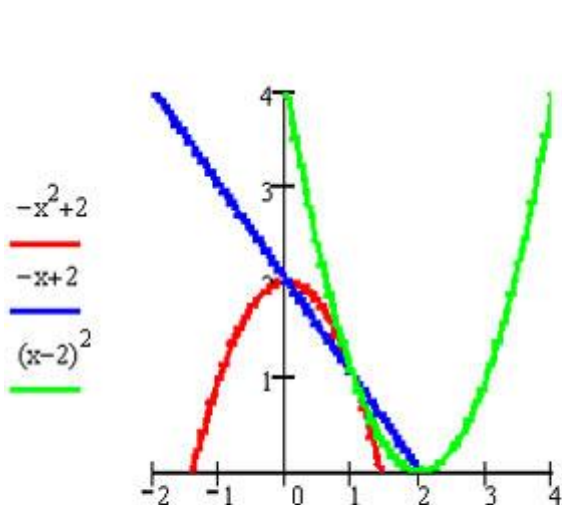
x

Напишите уравнение функции изображенной на рисунке:



Пример 2. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} -x^2 + 2, & \text{если } -1 \leq x \leq 0 \\ -x + 2, & \text{если } 0 < x \leq 2 \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$



$$y = \begin{cases} -x^2 + 2, & \text{если } -1 \leq x \leq 0 \\ -x + 2, & \text{если } 0 < x \leq 2 \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

Задания:

1. Постройте графики функций:

1)  $y = (x-2)^2+3$ ; 2)  $y = (x+1)^2-2$ ; 3)  $y = \sqrt{4-5x}$ ; 4)  $y=(x-1)^3+2$ .

2. Индивидуальная работа.

Тест:

1. Какая линия является графиком функции  $y = - (x-3)^2 +2$ ?

А. прямая, проходящая через начало координат

Б. парабола

В. прямая, не проходящая через начало координат

Г. гиперболы

2. График функции  $y=2(x+2)^2$  получится из графика функции  $y=2x^2$  сдвигом на 2 единицы масштаба

А. вправо

Б. влево

В. вверх

Г. вниз

3. Какая из функций является ограниченной сверху

А.  $y=2x^2$

Б  $y=-3(x-2)^2+3$

В  $y=3x^2-1$

Г  $y=x+3$

4. Для функции  $y=2(x-2)^2+3$  вспомогательные оси имеют уравнения вида:

А  $x=2$ ;  $y=3$ .

Б  $x=-2$ ;  $y=3$ .

В  $x=2$ ;  $y=-3$

Г  $x=-2$ ;  $y=-3$