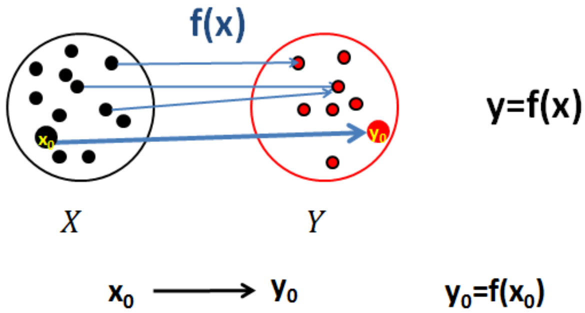
Лекция: Сложная функция. Обратная функция.

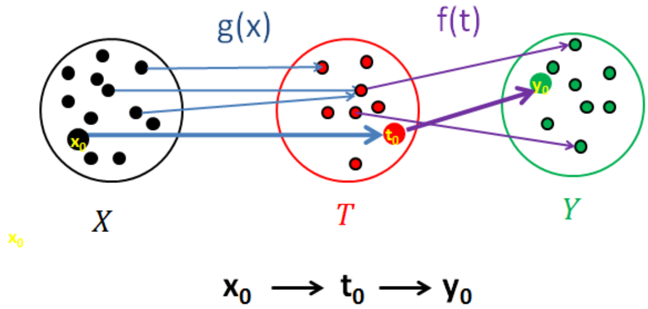
Преподаватель: Горячева А.О.

Функция – соответствие между множествами (X и У), при котором каждому элементу первого множества (X) соответствует не более одного элемента другого множества (У).

Представим это наглядно:



Сложную функцию можно рассмотреть как композицию двух функций, то есть как последовательное выполнение двух соответствий. По рисунку можно проследить, как некоторому элементу множества X соответствует элемент множества T, этот закон устанавливается внутренней функцией. А затем для элемента множества T внешняя функция указывает соответствующее значение элемента из множества У. Таким образом, для первоначального x_0 мы находим t_0, а затем y_0. Устанавливается зависимость: $x_0 \to t_0 \to y_0$.



Формула для задания сложной функции:

$$y=f(g(x)),$$

где **g(x)** – внутренняя функция, **f(t)** – внешняя функция.

$y=\sqrt{x^2-4}$

Пример:

$g(x) = x^2 - 4$ – внутренняя функция, $f(t) = \sqrt{t}$ – внешняя функция

Пример. Следующие функции являются сложными:

$$y=\sqrt{|\sin x|}, \qquad y=\cos 1/x, \qquad y=\log_a(x^3+1).$$

Цепочка последовательных преобразований для первой из них:

$$u=\sin x \;\text{-->}\; v=|u| \;\text{-->}\; y=\sqrt{v}.$$

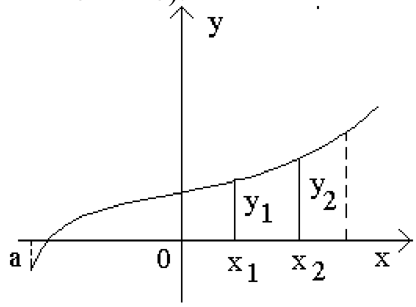
Запишите, пожалуйста, подобно этому цепочки последовательных преобразований для двух других функций.

Задание 1: В указанных сложных функциях назовите внешнюю и внутреннюю функции: 1). $y = \sin 2x$; 2) $y = (x^3 - 1)^5$; 3) $y = \cos(7x + 2)$; $y = \sin^2 x + 5\sin x$.

Обратная функция.

Привести пример с законом Ома для участка цепи: знаем напряжение – находим силу тока. Как зная силу тока найти напр.?

Пусть дана возрастающая или убывающая функция y= f(x), определенная на некотором отрезке [a; b]. Для определенности будем рассматривать возрастающую функцию (для убывающей все аналогично).



Рассмотрим два различных значения x1 и x2. Пусть y1=f(x1), y2=f(x2). Из определения возрастающей функции следует, что если x1<x2, то y1<y2. Следовательно, двум различным значениям x1 и x2 соответствуют два различных значения функции y1 и y2. Справедливо и обратное, т.е. если y1<y2, то из определения возрастающей функции следует, чтоx1<x2. Т.е. вновь двум различным значениям y1 и y2 соответствуют два различных значенияx1 и x2. Т.о., между значениями x и соответствующими им значениями y устанавливается взаимно однозначное соответствие, т.е. уравнение y=f(x) для каждого y (взятого из области значений функции y=f(x)) определяет единственное значение x, и можно сказать, что x есть некоторая функция аргумента y: x= g(y).

Эта функция называется **обратной** для функции y=f(x). Очевидно, что и функция y=f(x) является обратной для функции x=g(y).

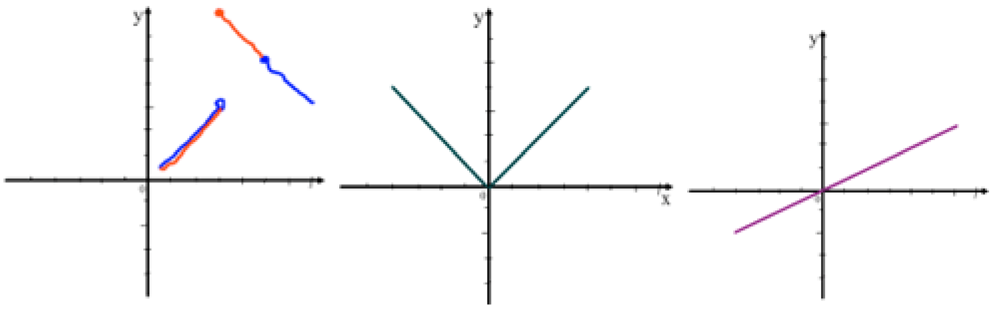
Обратная функция x=g(y) находится путем решения уравнения y=f(x) относительно x.

Не каждая функция имеет обратную.

Функцию, принимающую каждое свое значение в единственной точки области определения, называют **обратимой**.

<u>Замечание</u>: монотонность функции, является <u>достаточным</u> условием существования обратной функции. Но оно <u>не является</u> необходимым условием.

Примеры различных ситуаций, когда функция не монотонна, но обратима, когда функция не монотонна и не обратима, когда монотонна и обратима



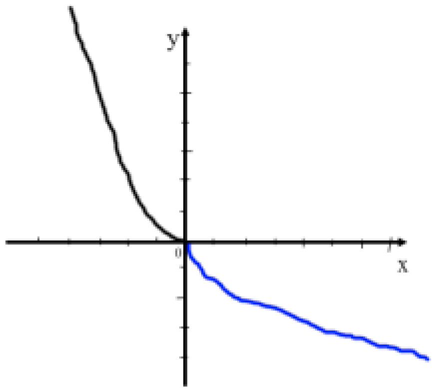
Алгоритм нахождения

1. Убедиться, что функция монотонна.
2. Выразить переменную x через y.
3. Переобозначить переменные. Вместо $x=f^{-1}(y)$ пишут $y=f^{-1}(x)$

<u>Пример 1:</u> Показать, что для функции y=5x-3 существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Линейная функция y=5x-3 определена на R, возрастает на R и область ее значений есть R. Значит, обратная функция существует на R. Чтобы найти ее аналитическое выражение, решим уравнение y=5x-3 относительно x; получим $x = \frac{y+3}{5}$. Это и есть искомая обратная функция. Она определена и возрастает на R.

<u>Пример 2:</u> Показать, что для функции $y=x^2$, $x \le 0$ существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.



Функция непрерывна, монотонна в своей области определения, следовательно, она обратима. Проанализировав области определения и множества значений функции, делается соответствующий вывод об аналитическом выражении для обратной функции.

Ответ: $y = -\sqrt{x}$

Задания:

1. №540 стр. 189.

Найти обратную функцию $y=f^{-1}(x)$ для функции $y=f(x)$ (46—50):

46. $y = x^2 - 1$, $X =]-\infty;\ 0]$. **47.** $y = \frac{x-1}{x+1}$.

48. $y = \sqrt[4]{x}$. **49.** $y = \frac{1}{1+x^3}$. **50.** $y = x|x| + 2x$.